

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

1-BOYUTLU DÜZENLİ UZUN DALGA
DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ



YÜKSEK LİSANS TEZİ

Damla ÖZÇELİK

Matematik Ana Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Sibel ÖZER

HAZİRAN 2025

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

1-BOYUTLU DÜZENLİ UZUN DALGA
DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ



YÜKSEK LİSANS TEZİ

Damla ÖZÇELİK
(36223614919)

Matematik Ana Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Sibel ÖZER
Eş Danışman: Prof. Dr. Yusuf UÇAR

HAZİRAN 2025

İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

1-BOYUTLU DÜZENLİ UZUN DALGA
DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Tezi Hazırlayan: Damla ÖZÇELİK
Yüksek Lisans Tezi

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında bilgi ve tecrübeleri ile yolumu aydınlatan, çalışmamın her aşamasında bana sabırla rehberlik eden değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Sibel ÖZER'e ve eş danışmanım Prof. Dr. Yusuf UÇAR'a en derin teşekkürlerimi sunarım. Bu tez çalışması boyunca bölümde bana her türlü imkanı sağlayan ve yardımlarını esirgemeyen başta bölüm başkanım sayın Prof. Dr. Alaattin ESEN olmak üzere bölümdeki diğer tüm hocalarıma da teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarım süresince sevgi ve anlayışlarıyla yanımda olan aileme teşekkür ederim. Ayrıca bu tez çalışmasına FYL-2024-3459 nolu proje ile katkıda bulunan İnönü Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimine teşekkür ederim.



ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “1-Boyutlu Düzenli Uzun Dalga Denkleminin Sayısal Çözümü” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Damla ÖZÇELİK



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ.....	i
ONUR SÖZÜ	ii
İÇİNDEKİLER	iii
ÇİZELGELER DİZİNİ	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
SEMBOLLER VE KISALTMALAR.....	x
ÖZET	xi
ABSTRACT	xii
1. GİRİŞ	1
1.1 Temel Kavramlar	3
2. BİRİNCİ MERTEBEDEN ADI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ	6
2.1 Sonlu Fark Yaklaşımlarının Elde Edilişi	6
2.2 Tek Adım Yöntemleri	11
2.2.1 Euler yöntemi	11
2.2.2 Yüksek mertebeden Taylor yöntemleri.....	11
2.2.3 Runge-Kutta yöntemleri	12
2.3 Çok Adım Yöntemleri	15
2.3.1 Açık çok adım (Adams-Bashforth) yöntemleri	15
2.3.2 Kapalı çok adım (Adams-Moulton) yöntemleri	18
3. DÜZENLİ UZUN DALGA (RLW) DENKLEMİ.....	21
3.1 RLW Denkleminin Korunum Sabitleri	21
3.2 Test Problemleri ve Korunum Sabitleri	22
3.2.1 Bir soliter dalganın hareketi	22
3.2.2 İki soliter dalganın hareketi	24
4. RLW DENKLEMİNİN SONLU FARK YÖNTEMİ İLE BİR SAYISAL ÇÖZÜMÜ	25
4.1 Şema-1	25
4.2 Şema-1'in Test Problemlerine Uygulanması.....	29
4.2.1 Bir soliter dalganın hareketi	29
4.2.2 İki soliter dalganın hareketi	39
5. RLW DENKLEMİNİN ADAMS-BASHFORTH YÖNTEMİ İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ	46
5.1 Şema-2.....	46
5.2 Şema-2'nin Test Problemlerine Uygulanması.....	48
5.2.1 Bir soliter dalganın hareketi	48
5.2.2 İki soliter dalganın hareketi	55
5.3 Şema-3	64
5.4 Şema-3'ün Test Problemlerine Uygulanması	68
5.4.1 Bir soliter dalganın hareketi	69

5.4.2 İki soliter dalganın hareketi	76
6. KARŞILAŞTIRMALAR VE SONUÇLAR	86
KAYNAKLAR.....	98
ÖZGEÇMİŞ	102



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1 : Şema-1 ile bir soliter dalganın $c = 0.1$ için korunum sabitleri ve hata normları : $\Delta t = 0.1, \Delta x = 0.1, 0.05, 0.025$	29
Çizelge 4.2 : Şema-1 ile bir soliter dalganın $c = 0.1$ için korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta t = 0.1, \Delta x = 0.1, 0.05, 0.025$	30
Çizelge 4.3 : Şema-1 ile bir soliter dalganın $c = 0.1$ için korunum sabitleri ve hata normları : $\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.1, 0.05, 0.025$	30
Çizelge 4.4 : Şema-1 ile bir soliter dalganın $c = 0.1$ için korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.1, 0.05, 0.025$	31
Çizelge 4.5 : Şema-1 ile bir soliter dalganın $c = 0.1$ için korunum sabitleri ve hata normları : $\Delta x = \Delta t = 0.2, 0.1, 0.05, 0.025$	31
Çizelge 4.6 : Şema-1 ile bir soliter dalganın $c = 0.1$ için korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta x = \Delta t = 0.2, 0.1, 0.05, 0.025$	31
Çizelge 4.7 : Şema-1 ile bir soliter dalganın $c = 0.03$ için korunum sabitleri ve hata normları : $\Delta t = 0.1, \Delta x = 0.1, 0.05, 0.025$	34
Çizelge 4.8 : Şema-1 ile bir soliter dalganın $c = 0.03$ için korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta t = 0.1, \Delta x = 0.1, 0.05, 0.025$	34
Çizelge 4.9 : Şema-1 ile bir soliter dalganın $c = 0.03$ için korunum sabitleri ve hata normları : $\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.1, 0.05, 0.025$	35
Çizelge 4.10 : Şema-1 ile bir soliter dalganın $c = 0.03$ için korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.1, 0.05, 0.025$	35
Çizelge 4.11 : Şema-1 ile bir soliter dalganın $c = 0.03$ için korunum sabitleri ve hata normları : $\Delta x = \Delta t = 0.1, 0.05, 0.025$	36
Çizelge 4.12 : Şema-1 ile bir soliter dalganın $c = 0.03$ için korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta x = \Delta t = 0.1, 0.05, 0.025$	36
Çizelge 4.13 : Şema-1 ile bir soliter dalganın $c = 0.03$ için korunum sabitleri ve hata normları : $\Delta x = 0.4, 0.2, 0.1, 0.05$ ve $\Delta t = 0.2, 0.1, 0.05$	36
Çizelge 4.14 : Şema-1 ile iki soliter dalganın korunum sabitleri : $\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$	39
Çizelge 4.15 : Şema-1 ile iki soliter dalganın korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$	40
Çizelge 4.16 : Şema-1 ile iki soliter dalganın korunum sabitleri : $\Delta x = 0.05, \Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$	41
Çizelge 4.17 : Şema-1 ile iki soliter dalganın korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta x = 0.05, \Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$	42
Çizelge 4.18 : Şema-1 ile iki soliter dalganın korunum sabitleri : $\Delta x = 0.025, \Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$	43
Çizelge 4.19 : Şema-1 ile iki soliter dalganın korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta x = 0.025, \Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$	44
Çizelge 5.1 : Şema-2 ile bir soliter dalganın $c = 0.1$ için korunum sabitleri ve hata normları : $\Delta t = 0.1, \Delta x = 0.1, 0.05, 0.025$	49
Çizelge 5.2 : Şema-2 ile bir soliter dalganın $c = 0.1$ için korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta t = 0.1, \Delta x = 0.1, 0.05, 0.025$	49
Çizelge 5.3 : Şema-2 ile bir soliter dalganın $c = 0.1$ için korunum sabitleri ve hata normları : $\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.1, 0.05, 0.025$	50

Çizelge 5.4 : Şema-2 ile bir soliter dalğanın $c = 0.1$ için korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.1, 0.05, 0.025$	50
Çizelge 5.5 : Şema-2 ile bir soliter dalğanın $c = 0.1$ için korunum sabitleri ve hata normları : $\Delta x = \Delta t = 0.1, 0.05, 0.025$	51
Çizelge 5.6 : Şema-2 ile bir soliter dalğanın $c = 0.1$ için korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta x = \Delta t = 0.1, 0.05, 0.025$	51
Çizelge 5.7 : Şema-2 ile bir soliter dalğanın $c = 0.1$ için korunum sabitleri ve hata normları : $\Delta x = 0.4, 0.2, 0.1, 0.05$ ve $\Delta t = 0.2, 0.1, 0.05$	51
Çizelge 5.8 : Şema-2 ile bir soliter dalğanın $c = 0.03$ için korunum sabitleri ve hata normları : $\Delta t = 0.1, \Delta x = 0.1, 0.05, 0.025$	54
Çizelge 5.9 : Şema-2 ile bir soliter dalğanın $c = 0.03$ için korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta t = 0.1, \Delta x = 0.1, 0.05, 0.025$	54
Çizelge 5.10: Şema-2 ile bir soliter dalğanın $c = 0.03$ için korunum sabitleri ve hata normları : $\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.1, 0.05, 0.025$	54
Çizelge 5.11: Şema-2 ile bir soliter dalğanın $c = 0.03$ için korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.1, 0.05, 0.025$	54
Çizelge 5.12: Şema-2 ile bir soliter dalğanın $c = 0.03$ için korunum sabitleri ve hata normları : $\Delta x = \Delta t = 0.1, 0.05, 0.025$	55
Çizelge 5.13: Şema-2 ile bir soliter dalğanın $c = 0.03$ için korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta x = \Delta t = 0.1, 0.05, 0.025$	55
Çizelge 5.14: Şema-2 ile bir soliter dalğanın $c = 0.03$ için korunum sabitleri ve hata normları : $\Delta x = 0.4, 0.2, 0.1, 0.05$ ve $\Delta t = 0.2, 0.1, 0.05$	56
Çizelge 5.15: Şema-2 ile iki soliter dalğanın korunum sabitleri : $\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$	57
Çizelge 5.16: Şema-2 ile iki soliter dalğanın korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$	58
Çizelge 5.17: Şema-2 ile iki soliter dalğanın korunum sabitleri : $\Delta x = 0.05, \Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$	59
Çizelge 5.18: Şema-2 ile iki soliter dalğanın korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta x = 0.05, \Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$	60
Çizelge 5.19: Şema-2 ile iki soliter dalğanın korunum sabitleri : $\Delta x = 0.025, \Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$	61
Çizelge 5.20: Şema-2 ile iki soliter dalğanın korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta x = 0.025, \Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$	62
Çizelge 5.21: Şema-3 ile bir soliter dalğanın $c = 0.1$ için korunum sabitleri ve hata normları : $\Delta t = 0.1, \Delta x = 0.1, 0.05, 0.025$	69
Çizelge 5.22: Şema-3 ile bir soliter dalğanın $c = 0.1$ için korunum sabitlerinin değişim miktarları : $\Delta t = 0.1, \Delta x = 0.1, 0.05, 0.025$	69
Çizelge 5.23: Şema-3 ile bir soliter dalğanın $c = 0.1$ için korunum sabitleri ve hata normları : $\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.1, 0.05, 0.025$	70
Çizelge 5.24: Şema-3 ile bir soliter dalğanın $c = 0.1$ için korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.1, 0.05, 0.025$	70
Çizelge 5.25: Şema-3 ile bir soliter dalğanın $c = 0.1$ için korunum sabitleri ve hata normları : $\Delta t = \Delta x = 0.1, 0.05, 0.025$	71
Çizelge 5.26: Şema-3 ile bir soliter dalğanın $c = 0.1$ için korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta t = \Delta x = 0.1, 0.05, 0.025$	71

Çizelge 5.27: Şema-3 ile bir soliter dalğanın $c = 0.1$ için korunum sabitleri ve hata normları : $\Delta x = 0.4, 0.2, 0.1$ ve $\Delta t = 0.2, 0.1, 0.05$	72
Çizelge 5.28: Şema-3 ile bir soliter dalğanın $c = 0.03$ için korunum sabitleri ve hata normları : $\Delta t = 0.1, \Delta x = 0.2, 0.1, 0.05$	72
Çizelge 5.29: Şema-3 ile bir soliter dalğanın $c = 0.03$ için korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta t = 0.1, \Delta x = 0.2, 0.1, 0.05$	73
Çizelge 5.30: Şema-3 ile bir soliter dalğanın $c = 0.03$ için korunum sabitleri ve hata normları : $\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.2, 0.1, 0.05$	73
Çizelge 5.31: Şema-3 ile bir soliter dalğanın $c = 0.03$ için korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.2, 0.1, 0.05$	73
Çizelge 5.32: Şema-3 ile bir soliter dalğanın $c = 0.03$ için korunum sabitleri ve hata normları : $\Delta x = \Delta t = 0.2, 0.1, 0.05$	75
Çizelge 5.33: Şema-3 ile bir soliter dalğanın $c = 0.03$ için korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta x = \Delta t = 0.2, 0.1, 0.05$	75
Çizelge 5.34: Şema-3 ile bir soliter dalğanın $c = 0.03$ için korunum sabitleri ve hata normları : $\Delta x = 0.4, 0.2, 0.1$ ve $\Delta t = 0.2, 0.1, 0.05$	75
Çizelge 5.35: Şema-3 ile iki soliter dalğanın korunum sabitleri : $\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$	77
Çizelge 5.36: Şema-3 ile iki soliter dalğanın korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$	78
Çizelge 5.37: Şema-3 ile iki soliter dalğanın korunum sabitleri : $\Delta x = 0.05, \Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$	80
Çizelge 5.38: Şema-3 ile iki soliter dalğanın korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta x = 0.05, \Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$	81
Çizelge 5.39: Şema-3 ile iki soliter dalğanın korunum sabitleri : $\Delta x = 0.025, \Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$	82
Çizelge 5.40: Şema-3 ile iki soliter dalğanın korunum sabitlerinin değişim miktarları : $\Delta x = 0.025, \Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$	83
Çizelge 6.1 : $c = 0.1$ için bir soliter dalğanın hata normlarının karşılaştırması	87
Çizelge 6.2 : $c = 0.1$ için bir soliter dalğanın korunum sabitleri ve korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarlarının karşılaştırması	87
Çizelge 6.3 : $c = 0.1$ için bir soliter dalğanın hata normlarının karşılaştırması : $\Delta t = \Delta x^2$..	88
Çizelge 6.4 : $c = 0.1$ için bir soliter dalğanın korunum sabitleri ve korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarlarının karşılaştırması : $\Delta t = \Delta x^2$	88
Çizelge 6.5 : $c = 0.1$ için $t = 20$ zamanında bir soliter dalğanın hata normları ve korunum sabitlerinin karşılaştırması : $\Delta x = 0.125, \Delta t = 0.1$	89
Çizelge 6.6 : $c = 0.1$ için $t = 20$ zamanında bir soliter dalğanın hata normları ve korunum sabitlerinin karşılaştırması : $\Delta x = \Delta t = 0.1$	90
Çizelge 6.7 : $c = 0.03$ için bir soliter dalğanın hata normlarının karşılaştırması	90
Çizelge 6.8 : $c = 0.03$ için bir soliter dalğanın korunum sabitleri ve korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarlarının karşılaştırması.....	91
Çizelge 6.9 : $c = 0.03$ için bir soliter dalğanın hata normlarının karşılaştırması : $\Delta t = \Delta x^2$	92
Çizelge 6.10: $c = 0.03$ için bir soliter dalğanın korunum sabitleri ve korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarlarının karşılaştırması : $\Delta t = \Delta x^2$	92
Çizelge 6.11: $c = 0.03$ için $t = 20$ zamanında bir soliter dalğanın hata normları ve korunum sabitlerinin karşılaştırması : $\Delta x = 0.125, \Delta t = 0.1$	93

Çizelge 6.12: $c = 0.03$ için $t = 20$ zamanında bir soliter dalganın hata normları ve korunum sabitlerinin karşılaştırması : $\Delta x = \Delta t = 0.1$	93
Çizelge 6.13: İki soliter dalganın korunum sabitlerinin karşılaştırması : $\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.01$..	94
Çizelge 6.14: İki soliter dalganın korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarlarının karşılaştırması : $\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.01$	94
Çizelge 6.15: İki soliter dalganın korunum sabitlerinin karşılaştırması : $\Delta x = 0.025, \Delta t = 0.001$	95
Çizelge 6.16: İki soliter dalganın korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarlarının karşılaştırması : $\Delta x = 0.025, \Delta t = 0.001$	95
Çizelge 6.17: İki soliter dalganın $t = 25$ zamanında korunum sabitlerinin karşılaştırması ..	96
Çizelge 6.18: İki soliter dalganın $t = 30$ zamanında korunum sabitlerinin karşılaştırması ...	97



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1 : Şema-1 ile bir soliter dalğanın çeşitli zamanlarda yaklaşık (○) ve analitik çözümleri (–) : $c = 0.1, \Delta x = \Delta t = 0.1$	32
Şekil 4.2 : Şema-1 ile bir soliter dalğanın $t = 20$ zamanında mutlak hata grafiği : $c = 0.1, \Delta x = \Delta t = 0.1$	33
Şekil 4.3 : Şema-1 ile bir soliter dalğanın çeşitli zamanlarda yaklaşık (○) ve analitik çözümleri (–) : $c = 0.03, \Delta x = \Delta t = 0.1$	37
Şekil 4.4 : Şema-1 ile bir soliter dalğanın $t = 20$ zamanında mutlak hata grafiği : $c = 0.03, \Delta x = \Delta t = 0.1$	38
Şekil 4.5 : Şema-1 ile iki soliter dalğanın çeşitli zamanlarda yaklaşık çözümleri : $\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.01$	45
Şekil 5.1 : Şema-2 ile bir soliter dalğanın çeşitli zamanlarda yaklaşık (○) ve analitik çözümleri (–) : $c = 0.1, \Delta x = \Delta t = 0.1$	52
Şekil 5.2 : Şema-2 ile bir soliter dalğanın $t = 20$ zamanında mutlak hata grafiği : $c = 0.1, \Delta x = \Delta t = 0.1$	53
Şekil 5.3 : Şema-2 ile bir soliter dalğanın çeşitli zamanlarda yaklaşık (○) ve analitik çözümleri (–) : $c = 0.03, \Delta x = \Delta t = 0.1$	63
Şekil 5.4 : Şema-2 ile bir soliter dalğanın $t = 20$ zamanında mutlak hata grafiği : $c = 0.03, \Delta x = \Delta t = 0.1$	64
Şekil 5.5 : Şema-2 ile iki soliter dalğanın çeşitli zamanlarda yaklaşık çözümleri : $\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.01$	65
Şekil 5.6 : Şema-3 ile bir soliter dalğanın çeşitli zamanlarda yaklaşık (○) ve analitik çözümleri (–) : $c = 0.1, \Delta x = \Delta t = 0.1$	74
Şekil 5.7 : Şema-3 ile bir soliter dalğanın $t = 20$ zamanında mutlak hata grafiği : $c = 0.1, \Delta x = \Delta t = 0.1$	76
Şekil 5.8 : Şema-3 ile bir soliter dalğanın çeşitli zamanlarda yaklaşık (○) ve analitik çözümleri (–) : $c = 0.03, \Delta x = \Delta t = 0.1$	79
Şekil 5.9 : Şema-3 ile bir soliter dalğanın $t = 20$ zamanında mutlak hata grafiği : $c = 0.03, \Delta x = \Delta t = 0.1$	84
Şekil 5.10 : Şema-3 ile iki soliter dalğanın çeşitli zamanlarda yaklaşık çözümleri : $\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.01$	85

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

RLW	:	Düzenli Uzun Dalga (Regularized Long Wave)
$\mathbb{R}$	:	Reel Sayılar Kümesi
x	:	Konum Değişkeni
t	:	Zaman Değişkeni
Δx	:	Konum Adım Uzunluğu
Δt	:	Zaman Adım Uzunluğu
$U(x, t)$	:	Analitik Çözüm
W_j^n	:	Yaklaşık Çözüm
L_2	:	Ortalama Hata Normu
L_∞	:	Maksimum Hata Normu
I_1	:	Kütle Korunum Sabiti
I_2	:	Momentum Korunum Sabiti
I_3	:	Enerji Korunum Sabiti
$\tilde{I}_1$	:	Kütle Korunum Sabitinin Yaklaşık Değeri
$\tilde{I}_2$	:	Momentum Korunum Sabitinin Yaklaşık Değeri
$\tilde{I}_3$	:	Enerji Korunum Sabitinin Yaklaşık Değeri

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

1-BOYUTLU DÜZENLİ UZUN DALGA DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

DAMLA ÖZÇELİK

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

102+xii sayfa

2025

Danışman: Doç. Dr. Sibel ÖZER

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde RLW denklemi hakkında literatür taraması yapılarak tezde kullanılan temel kavramlar ve teoremler verildi.

İkinci bölümde sonlu fark yaklaşımlarından ve iyi tanımlı bir başlangıç değer problemi için tek ve çok adım yöntemlerinin bazılarından bahsedildi.

Üçüncü bölümde RLW denkleminin sayısal çözümlerinin elde edildiği test problemleri tanımlanarak korunum sabitleri verildi.

Dördüncü bölümde RLW denklemi Crank-Nicolson yöntemine göre ayrıştırıldı. Daha sonra lineer olmayan terim Rubin-Graves lineerleştirilmesi ile lineerleştirildi ve sonlu fark yaklaşımları uygulanarak bir sayısal şema elde edildi. Elde edilen sayısal şema ile test problemlerinin sayısal çözümleri bulundu.

Beşinci bölümde RLW denklemi Adams-Bashforth yöntemine göre ayrıştırıldı. Daha sonra sonlu fark yaklaşımları uygulanarak iki sayısal şema elde edildi. Elde edilen sayısal şemalar ile test problemlerinin sayısal çözümleri bulundu.

Son olarak altıncı bölümde elde edilen şemaların karşılaştırılması yapılarak sonuçlar değerlendirildi.

Anahtar Kelimeler: Düzenli Uzun Dalga Denklemi, Sonlu Farklar, Çok Adım Yöntemleri

ABSTRACT

Master Thesis

NUMERICAL SOLUTION OF 1-DIMENSIONAL REGULARIZED LONG WAVE EQUATION

Damla ÖZÇELİK

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Mathematics

102+xii pages

2025

Supervisor: Assoc. Prof. Sibel ÖZER

This thesis consists of six chapters. In the first chapter, a literature review on the RLW equation is given and the basic concepts and theorems used in the thesis are given.

In the second chapter, finite difference approximations and some of the single and multi-step methods for a well-defined initial value problem are discussed.

In the third chapter, test problems for which numerical solutions of the RLW equation are obtained are defined and the conservation constants are given.

In the fourth section, the RLW equation is discretized according to the Crank-Nicolson method. Then the nonlinear term is linearized by Rubin-Graves linearization and a numerical scheme is obtained by applying finite difference approximations. With the obtained numerical scheme, numerical solutions of the test problems were found.

In the fifth section, the RLW equation is discretized according to the Adams-Bashforth method. Then, two numerical schemes were obtained by applying finite difference approximations. With the obtained numerical schemes, numerical solutions of the test problems were found.

Finally, in the sixth section, the results are evaluated by comparing the obtained schemes.

Keywords: Regularized Long Wave Equation, Finite Differences, Multistep Methods

1. GİRİŞ

Doğa ve mühendislik bilimlerinde karşılaşılan birçok fiziksel problemin matematiksel modeli doğrusal olmayan dalga denklemleri ile verilmektedir. Bu denklemler arasında yer alan 1-boyutlu düzenli uzun dalga (Regularized Long Wave-RLW) denklemi ilk olarak Peregrine [1] tarafından yapılan bir çalışmada görüldü. RLW denkleminin matematiksel teorisi Benjamin vd. [2] ile Bona ve Bryant [3] tarafından verildi. RLW denklemi sığ su dalgalarını, plazma dalgalarını ve diğer birçok fiziksel problemin davranışını modellemek için yaygın şekilde kullanılan doğrusal olmayan bir kısmi diferansiyel denklemdir. Ancak, doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri sınırlı sayıda başlangıç şartı için mümkün olduğundan bu tür denklemlerin çözümü sayısal yöntemler kullanılarak elde edilmektedir. Son yıllarda sayısal yöntemlerin gelişimi ve bilgisayar teknolojisindeki ilerlemelerin sayısal çözümlerin doğruluğunu ve etkinliğini artırdığı görülmektedir. Böylece, birçok araştırmacı tarafından çeşitli sayısal yöntemler kullanılarak RLW denkleminin sayısal çözümleri elde edildi. Gardner vd. [4] lineer B-spline, Dağ [5] kuadratik B-spline, Dağ ve Özer [6] kübik B-spline, Hepson vd. [7] zamana göre Crank-Nicolson ayrıklaştırması uygulayıp kübik B-spline yaklaşım fonksiyonlarını kullanarak en küçük kareler sonlu eleman yöntemi ile RLW denkleminin sayısal çözümünü elde ettiler. Doğan [8] lineer B-spline, Saka vd. [9] kuadratik B-spline, Dağ vd. [10] kuintik B-spline, Esen ve Kutluay [11] kuadratik B-spline, Mei ve Chen [12] ekstrapolasyon teknikleri kullanılarak lineer B-spline, Irk ve Keskin [13] kuadratik trigonometrik B-spline, Görgülü vd. [14] üstel B-spline, Irk vd. [15] kuartik trigonometric B-spline yaklaşım fonksiyonlarını kullanarak Galerkin sonlu eleman yöntemi ile RLW denkleminin sayısal çözümünü elde ettiler. RLW denklemine zamana göre operatör parçalama tekniğini uygulayarak Bhardwaj ve Shankar [16] kuintik B-spline, Yağmurlu vd. [17] kübik B-spline kollokasyon sonlu eleman yöntemini RLW denkleminin sayısal çözümü için kullandılar. RLW denklemine konuma göre operatör parçalama tekniğini uygulayarak Dağ vd. [18] kuadratik ve kübik B-spline kollokasyon sonlu eleman yöntemi ile RLW denkleminin sayısal çözümünü verdiler. Saka ve Dağ [19], Raslan [20] farklı ayrıklaştırma teknikleri kullanarak kübik B-spline, Saka ve Dağ [21] kuartik B-spline, Islam vd. [22] radyal baz fonksiyonlarını kullanarak kollokasyon sonlu eleman yöntemini uyguladılar. Irk [23] zamana göre Adams-Moulton, konuma göre kuintik B-spline ayrıklaştırması kullanan bir kollokasyon sonlu eleman yöntemi sundu. Zamana göre predictor-corrector ayrıklaştırması yaparak konuma göre Shokri [24] radyal baz fonksiyonlarını, Dağ vd. [25] kuartik B-spline, Saka vd. [26,27] kuintik B-spline ve kübik

B-spline baz fonksiyonlarını kullanan kollokasyon sonlu eleman yöntemini uyguladılar. RLW denklemindeki UU_x nonlinear terimine Rubin-Graves lineerleştirmesi yaparak Dağ vd. [28] kübik B-spline, Dağ ve Dereli [29] radyal baz fonksiyonlarını kullanarak kollokasyon sonlu eleman yöntemini, Başhan ve Yağmurlu [30] kuartik B-spline differential quadrature yöntemi üzerine temellenen sayısal algoritmalar sundular. Irk vd. [31] zamana göre ağırlıklı ortalama alıp kübik B-spline kollokasyon yöntemini, Hammad [32] Bernstein kollokasyon yöntemini, Kukreja [33] konuma göre kübik B-spline kollokasyon yöntemini uyguladıktan sonra zamana göre üçüncü mertebeye dört adım Runge-Kutta (SSP-RK43) yöntemini kullanarak RLW denkleminin sayısal çözümünü buldular. Dağ vd. [34] kosinüs baz fonksiyonlarını, Korkmaz ve Dağ [35] kübik B-spline fonksiyonlarını kullanarak differential quadrature yöntemiyle RLW denkleminin sayısal çözümünü elde ettiler. RLW denkleminin sayısal çözümünü elde etmek için Danaf vd. [36] Adomian ayrışım, Doğan [37] Petrov-Galerkin sonlu eleman, Hassan ve Saleh [38] Fourier leap-frog, Hozman ve Lamac [39] discontinuous Galerkin sonlu eleman, Bakodah ve Banaja [40] MOL(Method of Lines), Fang ve Li [41] mixed covolume, Bulut vd. [42] yüksek mertebeli Haar wavelet yöntemlerini kullandılar. Kutluay ve Esen [43] lineerleştirilmiş kapalı sonlu fark yöntemini, Lin vd. [44] yüksek mertebeli kapalı sonlu fark yöntemini, Cai [45] lineer ve nonlinear kapalı sonlu fark yöntemlerini, Yalvaç [46] nonlinear terimi çeşitli sonlu fark yaklaşımlarıyla lineerleştirerek sonlu fark yöntemini, Ghiloufi vd. [47] dördüncü mertebeden doğruluğa sahip korunumlu sonlu fark yöntemini, Hu vd. [48] korunumlu kapalı sonlu fark yöntemini uygulayarak RLW denkleminin sayısal çözümünü elde ettiler.

Bu tezin birinci bölümünde RLW denklemi hakkında literatür taraması yapılarak tezde kullanılan temel kavramlar ve teoremlerden bahsedildi. İkinci bölümde sonlu fark yaklaşımlarıyla birlikte iyi tanımlı bir başlangıç değer problemi için tek ve çok adım yöntemlerinin bazılarının elde edilişleri verildi. Üçüncü bölümde RLW denkleminin sayısal çözümlerinin elde edildiği test problemler tanıtıldı ve korunum sabitleri verildi. Dördüncü bölümde önce RLW denklemi Crank-Nicolson yöntemi ile ayrıklaştırıldı. Daha sonra lineer olmayan terim yerine Rubin-Graves lineerleştirmesi ve türevlerin yerlerine de uygun sonlu fark yaklaşımları yazılarak bir sayısal şema elde edildi. Elde edilen sayısal şema ile test problemlerinin sayısal çözümleri elde edildi. Beşinci bölümde RLW denklemi Adams-Bashforth yöntemine göre ayrıklaştırıldı. Daha sonra sonlu fark yöntemi uygulanarak iki sayısal şema elde

edildi. Elde edilen sayısal şemalar ile test problemlerinin sayısal çözümleri elde edildi. Altıncı bölümde elde edilen şemaların karşılaştırılması yapılarak sonuçlar değerlendirildi.

1.1 Temel Kavramlar

Bu kısımda tezde ihtiyaç duyulan bazı tanım ve teoremler verildi.

Tanım 1.1.1. $f(x)$ fonksiyonu x_0 noktasını içeren bir aralıkta her mertebeden türevlenebilir olsun. Bu durumda

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (1.1.1)$$

serisine $f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasındaki Taylor serisi denir. n sonlu bir doğal sayı olmak üzere

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (1.1.2)$$

polinomuna n . dereceden Taylor polinomu ve

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

ifadesine kalan terim denir [49, 50].

Tanım 1.1.2. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d\}$, $(x_0, y_0) \in D$ olmak üzere $f(x, y)$ fonksiyonunun (x_0, y_0) noktasında $(n+1)$. mertebeye kadar bütün kısmi türevleri mevcut olsun.

Bu durumda

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[(x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^k f(x_0, y_0) \quad (1.1.3)$$

serisine $f(x, y)$ fonksiyonunun (x_0, y_0) noktasında Taylor serisi denir. n sonlu bir doğal sayı olmak üzere

$$P_n(x, y) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left[(x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^k f(x_0, y_0) \quad (1.1.4)$$

polinomuna n . dereceden Taylor polinomu ve

$$R_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!} \left[(x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^{n+1} f(\xi(x), \mu(y))$$

ifadesine kalan terim denir [50].

Tanım 1.1.3. Bir sonlu fark yöntemindeki adım uzunlukları $(\Delta x, \Delta y$ vb.) küçülürken lokal kesme hatası da küçülüyorsa sonlu fark yöntemine tutarlıdır denir [51].

Tanım 1.1.4. Sayısal hesaplamalar ardışık olarak yapılırken başlangıç hatası sonuçta büyük hatalara sebep olmuyorsa sayısal çözüm yöntemine kararlıdır denir [51].

Tanım 1.1.5. Sayısal yöntemdeki adım uzunlukları sıfıra yaklaşırken sayısal çözüm tam çözüme yaklaşıyorsa sayısal çözüme yakınsaktır denir [51].

Tanım 1.1.6. Bir yöntemin hangi şartlar altında kararlı olduğunun araştırılmasına kararlılık analizi denir [52].

Teorem 1.1.1. (Lax'ın Denklik Teoremi) Bir sonlu fark yönteminin yakınsak olması için gerek ve yeter şart tutarlı ve kararlı olmasıdır [52].

Tanım 1.1.7. (Başlangıç değer problemi) Bir diferansiyel denklem ile birlikte verilen şartlar, bağımsız değişkenin bir tek değeri için verilmişse bu şartlara başlangıç şartları denir. Diferansiyel denklemin başlangıç şartlarını sağlayan çözümünün bulunması problemine de başlangıç değer problemi denir [50, 53].

Tanım 1.1.8. (Sınır değer problemi) Bir diferansiyel denklem ile birlikte verilen şartlar, bağımsız değişkenin birden fazla değeri için verilmişse bu şartlara sınır şartları denir. Diferansiyel denklemin sınır şartlarını sağlayan çözümünün bulunması problemine de sınır değer problemi denir [50, 53].

Tanım 1.1.9. $D \subset \mathbb{R}^2$ olmak üzere her $(x, y_1), (x, y_2) \in D$ için

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad (1.1.5)$$

olacak şekilde $L > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna D bölgesinde y değişkenine göre Lipschitz şartını sağlıyor denir. L sabitine de Lipschitz sabiti denir [50, 53].

Teorem 1.1.2. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, -\infty < y < \infty\}$ olmak üzere $f(x, y)$ fonksiyonu D bölgesinde sürekli olsun. $f(x, y)$ fonksiyonu D bölgesi üzerinde y değişkenine göre Lipschitz şartını sağlıyorsa

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad a \leq x \leq b, \\ y(a) = \alpha \end{array} \right\} \quad (1.1.6)$$

şeklinde verilen başlangıç değer probleminin bir tek $y(x)$ çözümü vardır [50, 53].

Tanım 1.1.10. (1.1.6) denklemi ile verilen başlangıç değer probleminde yapılan küçük bir değişiklik problemin çözümünde büyük değişikliklere sebep olmuyorsa başlangıç değer problemine iyi tanımlıdır denir [50].

Teorem 1.1.3. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, -\infty < y < \infty\}$ olsun. $f(x, y)$ fonksiyonu D bölgesinde sürekli ve y değişkenine göre Lipschitz şartını sağlıyorsa (1.1.6) denklemi ile verilen başlangıç değer problemi iyi tanımlıdır [50, 53].

Teorem 1.1.4. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ bölgesi verilsin. $f(x, y)$ fonksiyonu D bölgesinde sürekli ve y değişkenine göre Lipschitz şartını sağlasın. $L > 0$ Lipschitz sabiti, $M = \max |f(x, y)|$ ve $h < \min(a, b/M, 1/L)$ olmak üzere (1.1.6) başlangıç değer probleminin $|x - x_0| \leq h$ aralığında tanımlı bir tek $y = y(x)$ çözümü vardır [53].

2. BİRİNCİ MERTEBEDEN ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Diferansiyel denklemler, bilim ve mühendislikte bir değişkenin diğerine göre değişimini içeren problemleri modellemek için kullanılır. Bu problemlerin çoğu verilen bir başlangıç şartını sağlayan bir diferansiyel denklemin çözümünü gerektirir. Genellikle fiziksel problemi modelleyen diferansiyel denklem analitik olarak çözülemeyecek kadar karmaşıktır. Bu durumda izlenilen yollardan biri analitik çözüm elde edilebilecek şekilde diferansiyel denklem basitleştirilir ve basitleştirilmiş diferansiyel denklemin çözümü orijinal problemin yaklaşık çözümü olarak kullanılır. İzlenilen ikinci yol ise orijinal problemin çözümünü yaklaşık olarak hesaplamak için çeşitli sayısal hesaplama yöntemleri geliştirmektir [50]. Dolayısıyla, bu tür problemlerin tam çözümü yerine genellikle uygun sayısal teknik ve yöntemler yardımıyla kabul edilebilir bir düzeyde hataya sahip yaklaşık çözümü tercih edilir. Lineer veya lineer olmayan diferansiyel denklemlerden oluşan başlangıç veya sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümünü elde etmek için en çok kullanılan sayısal yöntemlerden biri sonlu fark yöntemleridir.

Bu bölümde bazı sonlu fark yaklaşımlarının elde edilişi ve (1.1.6) denklemi ile verilen başlangıç değer probleminin yaklaşık çözümünü elde etmek için kullanılan tek ve çok adım yöntemlerinden bazıları hakkında kısa bilgi verildi.

2.1 Sonlu Fark Yaklaşımlarının Elde Edilişi

Diferansiyel denklemlerin yaklaşık olarak çözümünü elde etmek için kullanılan yöntemlerden biri diferansiyel denklemde bulunan türevler yerine sonlu fark yaklaşımları kullanılarak elde edilen sonlu fark yöntemleridir.

$f(x, y)$ fonksiyonu $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d\}$ bölgesinde tanımlı ve sürekli olsun. $[a, b]$ aralığı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_j < \dots < x_{M-1} < x_M = b$ şeklinde M eşit parçaya, $[c, d]$ aralığı $c = y_0 < y_1 < \dots < y_n < \dots < y_{N-1} < y_N = d$ şeklinde N eşit parçaya bölünerek D bölgesinde düzgün bir ızgara oluşturulur. Izgaranın kesim noktası olan bir $(x_j, y_n) \in D$ noktasına düğüm noktası denir. $\Delta x = x_{j+1} - x_j, j = 0, 1, \dots, M-1; \Delta y = y_{n+1} - y_n, n = 0, 1, \dots, N-1$ adım uzunlukları olmak üzere (x_j, y_n) düğüm noktasında $f(x, y)$ fonksiyonunun analitik ve yaklaşık değerleri sırasıyla $f(x_j, y_n) = f_j^n$ ve W_j^n şeklinde gösterildi.

$f(x, y)$ fonksiyonunun (1.1.3) denklemi ile verilen Taylor serisi sırasıyla $(x_j + \Delta x, y_n)$ ve $(x_j - \Delta x, y_n)$ noktaları için yazılırsa

$$\begin{aligned} f(x_j + \Delta x, y_n) &= f(x_j, y_n) + \Delta x \frac{\partial f(x_j, y_n)}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x_j, y_n)}{\partial x^2} \\ &+ \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f(x_j, y_n)}{\partial x^3} + \dots \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

ve

$$\begin{aligned} f(x_j - \Delta x, y_n) &= f(x_j, y_n) - \Delta x \frac{\partial f(x_j, y_n)}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x_j, y_n)}{\partial x^2} \\ &- \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f(x_j, y_n)}{\partial x^3} + \dots \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

denklemleri elde edilir. $O(\Delta x)$ terimi kesme hatasını göstermek üzere (2.1.1) ve (2.1.2) denklemleri sırasıyla

$$\frac{\partial f(x_j, y_n)}{\partial x} = \frac{f(x_j + \Delta x, y_n) - f(x_j, y_n)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (2.1.3)$$

ve

$$\frac{\partial f(x_j, y_n)}{\partial x} = \frac{f(x_j, y_n) - f(x_j - \Delta x, y_n)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (2.1.4)$$

şeklinde yazılıp kesme hatası ihmal edilirse birinci mertebeden türev için

$$\frac{\partial f(x_j, y_n)}{\partial x} \cong \frac{W_{j+1}^n - W_j^n}{\Delta x} \quad (2.1.5)$$

ve

$$\frac{\partial f(x_j, y_n)}{\partial x} \cong \frac{W_j^n - W_{j-1}^n}{\Delta x} \quad (2.1.6)$$

şeklinde yaklaşık değerler elde edilir. (2.1.5) ve (2.1.6) denklemlerine sırasıyla (x_j, y_n) noktasında $f(x, y)$ fonksiyonunun x değişkenine göre birinci mertebeden türevi için iki nokta ileri sonlu fark yaklaşımı ve iki nokta geri sonlu fark yaklaşımı denir.

(2.1.1) ve (2.1.2) denklemleri ile verilen seriler ikinci mertebeden türevli terimlere kadar yazılıp taraf tarafa çıkarılırsa

$$f(x_j + \Delta x, y_n) - f(x_j - \Delta x, y_n) = 2\Delta x \frac{\partial f(x_j, y_n)}{\partial x} + O((\Delta x)^3)$$

bulunur. Bu denklem

$$\frac{\partial f(x_j, y_n)}{\partial x} = \frac{f(x_j + \Delta x, y_n) - f(x_j - \Delta x, y_n)}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2) \quad (2.1.7)$$

şeklinde yazılarak kesme hatası ihmal edilirse birinci mertebeden türev için

$$\frac{\partial f(x_j, y_n)}{\partial x} \cong \frac{W_{j+1}^n - W_{j-1}^n}{2\Delta x} \quad (2.1.8)$$

şeklinde yaklaşık değer elde edilir. (2.1.8) denkleminde (x_j, y_n) noktasında $f(x, y)$ fonksiyonunun x değişkenine göre birinci mertebeden türevi için üç nokta merkezi sonlu fark yaklaşımı denir.

(2.1.1) ve (2.1.2) denklemleri ile verilen seriler üçüncü mertebeden türevli terimlere kadar yazılıp taraf tarafa toplanırsa

$$f(x_j + \Delta x, y_n) + f(x_j - \Delta x, y_n) = 2f(x_j, y_n) + (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 f(x_j, y_n)}{\partial x^2} + O((\Delta x)^4)$$

bulunur. Bu denklemden

$$\frac{\partial^2 f(x_j, y_n)}{\partial x^2} = \frac{f(x_j - \Delta x, y_n) - 2f(x_j, y_n) + f(x_j + \Delta x, y_n)}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2) \quad (2.1.9)$$

elde edilir. (2.1.9) denklemindeki $O((\Delta x)^2)$ kesme hatası ihmal edilirse ikinci mertebeden türev için

$$\frac{\partial^2 f(x_j, y_n)}{\partial x^2} \cong \frac{W_{j-1}^n - 2W_j^n + W_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (2.1.10)$$

şeklinde bir yaklaşık değer elde edilir. (2.1.10) denkleminde (x_j, y_n) noktasında $f(x, y)$ fonksiyonunun x değişkenine göre ikinci mertebeden türevi için üç nokta merkezi sonlu fark yaklaşımı denir [52].

$f(x, y)$ fonksiyonunun (1.1.3) denklemi ile verilen Taylor serisi sırasıyla $(x_j + \Delta x, y_n)$, $(x_j - \Delta x, y_n)$, $(x_j + 2\Delta x, y_n)$ ve $(x_j - 2\Delta x, y_n)$ noktaları için yazılırsa

$$f(x_j + \Delta x, y_n) = f(x_j, y_n) + \Delta x \frac{\partial f(x_j, y_n)}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x_j, y_n)}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f(x_j, y_n)}{\partial x^3} + \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 f(x_j, y_n)}{\partial x^4} + O((\Delta x)^5) \quad (2.1.11)$$

$$f(x_j - \Delta x, y_n) = f(x_j, y_n) - \Delta x \frac{\partial f(x_j, y_n)}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x_j, y_n)}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f(x_j, y_n)}{\partial x^3} + \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 f(x_j, y_n)}{\partial x^4} - O((\Delta x)^5) \quad (2.1.12)$$

$$f(x_j + 2\Delta x, y_n) = f(x_j, y_n) + 2\Delta x \frac{\partial f(x_j, y_n)}{\partial x} + \frac{4(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x_j, y_n)}{\partial x^2} + \frac{8(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f(x_j, y_n)}{\partial x^3} + \frac{16(\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 f(x_j, y_n)}{\partial x^4} + O((\Delta x)^5) \quad (2.1.13)$$

$$f(x_j - 2\Delta x, y_n) = f(x_j, y_n) - 2\Delta x \frac{\partial f(x_j, y_n)}{\partial x} + \frac{4(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x_j, y_n)}{\partial x^2} - \frac{8(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f(x_j, y_n)}{\partial x^3} + \frac{16(\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 f(x_j, y_n)}{\partial x^4} - O((\Delta x)^5) \quad (2.1.14)$$

elde edilir. (2.1.11), (2.1.12), (2.1.13) ve (2.1.14) denklemleri sırasıyla a, b, c ve d katsayıları ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned}
& af(x_j + \Delta x, y_n) + bf(x_j - \Delta x, y_n) + cf(x_j + 2\Delta x, y_n) + df(x_j - 2\Delta x, y_n) \\
&= (a + b + c + d)f(x_j, y_n) + (a - b + 2c - 2d)\Delta x \frac{\partial f(x_j, y_n)}{\partial x} \\
&+ (a + b + 4c + 4d) \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 f(x_j, y_n)}{\partial x^2} + (a - b + 8c - 8d) \frac{(\Delta x)^3}{6} \frac{\partial^3 f(x_j, y_n)}{\partial x^3} \\
&+ (a + b + 16c + 16d) \frac{(\Delta x)^4}{24} \frac{\partial^4 f(x_j, y_n)}{\partial x^4} + O((\Delta x)^5)
\end{aligned} \tag{2.1.15}$$

denklemini elde edilir. (2.1.15) denkleminin $\partial f(x_j, y_n) / \partial x$ türevini elde etmek için

$$\left. \begin{aligned} a - b + 2c - 2d &= 1 \\ a + b + 4c + 4d &= 0 \\ a - b + 8c - 8d &= 0 \\ a + b + 16c + 16d &= 0 \end{aligned} \right\}$$

olmalıdır. Bu denklem sisteminin çözümü

$$a = \frac{8}{12}, b = -\frac{8}{12}, c = -\frac{1}{12}, d = \frac{1}{12} \tag{2.1.16}$$

olduğuna göre

$$\frac{\partial f(x_j, y_n)}{\partial x} = \frac{f(x_j - 2\Delta x, y_n) - 8f(x_j - \Delta x, y_n) + 8f(x_j + \Delta x, y_n) - f(x_j + 2\Delta x, y_n)}{12\Delta x} + O((\Delta x)^4) \tag{2.1.17}$$

olarak elde edilir. (2.1.17) denklemindeki $O((\Delta x)^4)$ kesme hatası ihmal edilirse birinci mertebeden türev için

$$\frac{\partial f(x_j, y_n)}{\partial x} \cong \frac{W_{j-2} - 8W_{j-1} + 8W_{j+1} - W_{j+2}}{12\Delta x} \tag{2.1.18}$$

şeklinde yaklaşık değer elde edilir. (2.1.18) denkleminin (x_j, y_n) noktasında $f(x, y)$ fonksiyonunun x değişkenine göre birinci mertebeden türevi için beş nokta merkezi sonlu fark yaklaşımı denir.

Benzer şekilde, (2.1.15) denkleminin $\partial^2 f(x_j, y_n) / \partial x^2$ türevini elde etmek için

$$\left. \begin{aligned} a - b + 2c - 2d &= 0 \\ a + b + 4c + 4d &= 1 \\ a - b + 8c - 8d &= 0 \\ a + b + 16c + 16d &= 0 \end{aligned} \right\}$$

olmalıdır. Bu denklem sisteminin çözümü

$$a = \frac{2}{3}, b = \frac{2}{3}, c = -\frac{1}{24}, d = -\frac{1}{24} \tag{2.1.19}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(x_j, y_n)}{\partial x^2} = & \frac{1}{12(\Delta x)^2} [f(x_j - 2\Delta x, y_n) + 16f(x_j - \Delta x, y_n) - 30f(x_j, y_n) \\ & + 16f(x_j + \Delta x, y_n) - f(x_j + 2\Delta x, y_n)] + O((\Delta x)^4) \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

elde edilir. (2.1.20) denklemindeki $O((\Delta x)^4)$ kesme hatası ihmal edilirse ikinci mertebeden türev için

$$\frac{\partial^2 f(x_j, y_n)}{\partial x^2} \cong \frac{-W_{j-2}^n + 16W_{j-1}^n - 30W_j^n + 16W_{j+1}^n - W_{j+2}^n}{12(\Delta x)^2} \quad (2.1.21)$$

şeklinde yaklaşık değer elde edilir. (2.1.21) denkleminde (x_j, y_n) noktasında $f(x, y)$ fonksiyonunun x değişkenine göre ikinci mertebeden türevi için beş nokta merkezi sonlu fark yaklaşımı denir [54].

Benzer şekilde y değişkenine göre sonlu fark yaklaşımlarını elde edebilmek için $f(x, y)$ fonksiyonunun (1.1.3) denklemi ile verilen Taylor serisi sırasıyla $(x_j, y_n + \Delta y)$ ve $(x_j, y_n - \Delta y)$ noktaları için yazılırsa

$$\begin{aligned} f(x_j, y_n + \Delta y) = & f(x_j, y_n) + \Delta y \frac{\partial f(x_j, y_n)}{\partial y} + \frac{(\Delta y)^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x_j, y_n)}{\partial y^2} \\ & + \frac{(\Delta y)^3}{3!} \frac{\partial^3 f(x_j, y_n)}{\partial y^3} + \dots \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

ve

$$\begin{aligned} f(x_j, y_n - \Delta y) = & f(x_j, y_n) - \Delta y \frac{\partial f(x_j, y_n)}{\partial y} + \frac{(\Delta y)^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x_j, y_n)}{\partial y^2} \\ & - \frac{(\Delta y)^3}{3!} \frac{\partial^3 f(x_j, y_n)}{\partial y^3} + \dots \end{aligned} \quad (2.1.23)$$

denklemleri elde edilir. $O(\Delta y)$ terimi kesme hatasını göstermek üzere (2.1.22) ve (2.1.23) denklemlerinden birinci mertebeden türev için sırasıyla

$$\frac{\partial f(x_j, y_n)}{\partial y} = \frac{f(x_j, y_n + \Delta y) - f(x_j, y_n)}{\Delta y} + O(\Delta y) \quad (2.1.24)$$

$$\frac{\partial f(x_j, y_n)}{\partial y} = \frac{f(x_j, y_n) - f(x_j, y_n - \Delta y)}{\Delta y} + O(\Delta y) \quad (2.1.25)$$

elde edilir. (2.1.24) ve (2.1.25) denklemlerindeki kesme hatası ihmal edilirse birinci mertebeden türev için yaklaşık değer

$$\frac{\partial f(x_j, y_n)}{\partial y} \cong \frac{W_j^{n+1} - W_j^n}{\Delta y} \quad (2.1.26)$$

$$\frac{\partial f(x_j, y_n)}{\partial y} \cong \frac{W_j^n - W_j^{n-1}}{\Delta y} \quad (2.1.27)$$

şeklinde elde edilir. (2.1.26) ve (2.1.27) denklemlerine sırasıyla (x_j, y_n) noktasında $f(x, y)$ fonksiyonunun y değişkenine göre birinci mertebeden türevi için iki nokta ileri sonlu fark ve iki nokta geri sonlu fark yaklaşımı denir.

2.2 Tek Adım Yöntemleri

Bu kısımda (1.1.6) denklemi ile verilen iyi tanımlı bir başlangıç değer probleminin sayısal çözümü için Euler, yüksek mertebeden Taylor ve Runge-Kutta yöntemlerinin elde edilişleri kısaca verildi [50, 53]. Başlangıç değer probleminin çözüm aralığı $[a, b]$, M eşit parçaya bölünürse adım uzunluğu $\Delta x = (b - a)/M$ olmak üzere $j = 0, 1, \dots, M$ için düğüm noktaları $x_j = a + j\Delta x$ olarak elde edilir. Bu kısımda her j için $y(x_j)$ 'nin yaklaşık değeri w_j ile gösterildi.

2.2.1 Euler yöntemi

Adi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümü için geliştirilen en eski yöntemlerden biri Euler yöntemidir. x_{j+1} düğüm noktasında y değişkeninin yaklaşık değerini elde etmek için $y(x)$ fonksiyonunun x_j noktasındaki Taylor serisi

$$y(x) = y(x_j) + (x - x_j)y'(x_j) + \frac{(x - x_j)^2}{2}y''(\xi_j), \quad x_j \leq \xi_j \leq x_{j+1}$$

şeklinde olup bu seride $x = x_{j+1}$ yazılırsa $\Delta x = x_{j+1} - x_j$ ve $y'(x_j) = f(x_j, y(x_j))$ olduğundan

$$y(x_{j+1}) = y(x_j) + \Delta x f(x_j, y(x_j)) + \underbrace{\frac{(\Delta x)^2}{2}y''(\xi_j)}_{\text{Kesme hatası}} \quad (2.2.1)$$

denklemi elde edilir. Bu denklemdeki kesme hatası ihmal edilirse $y(x_{j+1})$ için yaklaşık değer bulunur. Bu durumda Euler yönteminin fark denklemi

$$\left. \begin{aligned} w_0 &= \alpha, \\ w_{j+1} &= w_j + \Delta x f(x_j, w_j), \quad j = 0, 1, \dots, M-1 \end{aligned} \right\} \quad (2.2.2)$$

şeklinde elde edilir. Euler yöntemi $O(\Delta x)$ hata mertebesine sahiptir [50].

2.2.2 Yüksek mertebeden Taylor yöntemleri

Yüksek mertebeden Taylor yöntemleri, birinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümünde daha yüksek doğruluk sağlamak amacıyla kullanılan tek adımlı yöntemlerdir. (1.1.6) denklemi ile verilen başlangıç değer probleminin analitik çözümü olan $y(x)$ fonksiyonu

$(n+1)$. mertebeye kadar sürekli türevlenebilir olsun. $y(x)$ fonksiyonunun x_j noktasındaki Taylor serisinin $x = x_{j+1}$ noktasındaki değeri, $\Delta x = x_{j+1} - x_j$ ve $x_j \leq \xi_j \leq x_{j+1}$ olmak üzere

$$y(x_{j+1}) = y(x_j) + \Delta x y'(x_j) + \dots + \frac{(\Delta x)^n}{n!} y^{(n)}(x_j) + \frac{(\Delta x)^{n+1}}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\xi_j) \quad (2.2.3)$$

şeklindedir. $y'(x) = f(x, y(x))$, $y''(x) = f'(x, y(x))$, $\dots$, $y^{(n)}(x) = f^{(n-1)}(x, y(x))$ olduğundan bu eşitlikler (2.2.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} y(x_{j+1}) = & y(x_j) + \Delta x f(x_j, y(x_j)) + \frac{(\Delta x)^2}{2} f'(x_j, y(x_j)) \\ & + \dots + \frac{(\Delta x)^n}{n!} f^{(n-1)}(x_j, y(x_j)) + \underbrace{\frac{(\Delta x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(\xi_j, y(\xi_j))}_{\text{Kesme hatası}} \end{aligned}$$

elde edilir. Kesme hatası ihmal edilirse $y(x_{j+1})$ için yaklaşık değer bulunur. Bu durumda $n > 1$ için

$$T^{(n)}(x_j, w_j) = f(x_j, w_j) + \frac{\Delta x}{2} f'(x_j, w_j) + \dots + \frac{(\Delta x)^{n-1}}{n!} f^{(n-1)}(x_j, w_j) \quad (2.2.4)$$

olmak üzere n . mertebeden Taylor yönteminin fark denklemi

$$\left. \begin{aligned} w_0 &= \alpha \\ w_{j+1} &= w_j + \Delta x T^{(n)}(x_j, w_j), \quad j = 0, 1, \dots, M-1 \end{aligned} \right\} \quad (2.2.5)$$

olarak bulunur. n . mertebeden Taylor yöntemi $O((\Delta x)^n)$ hata mertebesine sahiptir.

2.2.3 Runge-Kutta yöntemleri

Runge-Kutta yöntemleri, (1.1.6) denklemi ile verilen başlangıç değer probleminin sayısal çözümünü elde etmek için en çok kullanılan yöntemlerden biri olup $f(x, y)$ fonksiyonunun yüksek mertebeden türevlerini almaya ihtiyaç duymadan yüksek mertebeden Taylor yöntemleriyle aynı hata mertebesine sahip yöntemlerdir.

İkinci mertebeden bir Runge-Kutta yöntemini elde etmek için

$$T^{(2)}(x, y) = a_1 f(x + \alpha_1, y + \beta_1) \quad (2.2.6)$$

olacak şekilde a_1, α_1, β_1 parametreleri belirlenmelidir. Bunun için ilk olarak

$$\begin{aligned} f'(x, y) &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \\ &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} y'(x) \\ &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} f(x, y) \end{aligned}$$

olduğundan (2.2.4) denklemi $n = 2$ için

$$T^{(2)}(x,y) = f(x,y) + \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} f(x,y) \right) \quad (2.2.7)$$

olarak düzenlenir. Daha sonra $a_1 f(x + \alpha_1, y + \beta_1)$ fonksiyonun birinci dereceden Taylor polinomu

$$a_1 f(x + \alpha_1, y + \beta_1) = a_1 f(x,y) + a_1 \alpha_1 \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + a_1 \beta_1 \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \quad (2.2.8)$$

olmak üzere (2.2.7) ve (2.2.8) denklemlerinin birbirine eşit olması için

$$a_1 = 1, \quad a_1 \alpha_1 = \frac{\Delta x}{2} \quad \text{ve} \quad a_1 \beta_1 = \frac{\Delta x}{2} f(x,y)$$

olmalıdır. Bu durumda bulunması gereken parametreler

$$\alpha_1 = \frac{\Delta x}{2}, \quad \beta_1 = \frac{\Delta x}{2} f(x,y)$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu parametreler (2.2.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$T^{(2)}(x,y) = f\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta x}{2} f(x,y)\right)$$

şeklinde bulunur ve fark denklemi

$$\left. \begin{aligned} w_0 &= \alpha, \\ w_{j+1} &= w_j + \Delta x f\left(x_j + \frac{\Delta x}{2}, w_j + \frac{\Delta x}{2} f(x_j, w_j)\right) \end{aligned} \right\} \quad (2.2.9)$$

şeklinde yazılır. Elde edilen bu fark denkleminde orta nokta yöntemi denir.

İkinci mertebeden bir diğer Runge-Kutta yöntemi

$$T^{(2)}(x,y) = a_1 f(x,y) + a_2 f(x + \alpha_2, y + \delta_2 f(x,y)) \quad (2.2.10)$$

olacak şekilde a_1, a_2, α_2 ve δ_2 parametreleri belirlenerek elde edilir. $a_1 f(x,y) + a_2 f(x + \alpha_2, y + \delta_2 f(x,y))$ ifadesinin ikinci teriminin birinci dereceden Taylor polinomu yazılarak düzenlenirse

$$\begin{aligned} a_1 f(x,y) + a_2 f(x + \alpha_2, y + \delta_2 f(x,y)) &= a_1 f(x,y) + a_2 f(x,y) + a_2 \alpha_2 \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ &\quad + a_2 \delta_2 \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} f(x,y) \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

elde edilir. (2.2.7) ve (2.2.11) denklemlerinin sağ taraflarının birbirine eşit olması için

$$a_1 + a_2 = 1, \quad a_2 \alpha_2 = \frac{\Delta x}{2} \quad \text{ve} \quad a_2 \delta_2 = \frac{\Delta x}{2} \quad (2.2.12)$$

olmalıdır. Bu ise dört bilinmeyenli üç denklemden oluşan nonlinear bir denklem sistemidir. Bilinmeyen sayısı denklem sayısından fazla olduğu için denklem sisteminin çok çözümü vardır. Bu durumda ilk olarak

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad a_2 = \frac{1}{2}$$

olarak seçilirse

$$\alpha_2 = \delta_2 = \Delta x$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu parametreler (2.2.10) denkleminde yerine yazılırsa

$$T^{(2)}(x, y) = \frac{1}{2}f(x, y) + \frac{1}{2}f(x + \Delta x, y + \Delta x f(x, y))$$

şeklinde bulunur. Bu durumda elde edilen ikinci mertebeden Runge-Kutta yönteminin fark denklemleri $j = 0, 1, \dots, M - 1$ için

$$\left. \begin{aligned} w_0 &= \alpha, \\ w_{j+1} &= w_j + \frac{\Delta x}{2} [f(x_j, w_j) + f(x_j + \Delta x, w_j + \Delta x f(x_j, w_j))] \end{aligned} \right\} \quad (2.2.13)$$

şeklinde dir. Literatürde bu yöntem, modifiye edilmiş Euler yöntemi olarak da isimlendirilir.

İkinci olarak

$$a_1 = \frac{1}{4} \quad \text{ve} \quad a_2 = \frac{3}{4}$$

olarak seçilirse

$$\alpha_2 = \delta_2 = \frac{2\Delta x}{3}$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu parametreler (2.2.10) denkleminde yerine yazılırsa

$$T^{(2)}(x, y) = \frac{1}{4}f(x, y) + \frac{3}{4}f\left(x + \frac{2\Delta x}{3}, y + \frac{2\Delta x}{3}f(x, y)\right)$$

şeklinde bulunur. Bu durumda elde edilen ikinci mertebeden Runge-Kutta yönteminin fark denklemleri $j = 0, 1, \dots, M - 1$ için

$$\left. \begin{aligned} w_0 &= \alpha, \\ w_{j+1} &= w_j + \frac{\Delta x}{4} [f(x_j, w_j) + 3f(x_j + \frac{2\Delta x}{3}, w_j + \frac{2\Delta x}{3}f(x_j, w_j))] \end{aligned} \right\} \quad (2.2.14)$$

şeklinde dir. Benzer şekilde daha birçok ikinci mertebeden Runge-Kutta yöntemi elde edilebilir.

En çok kullanılan Runge-Kutta yöntemlerinden biri dördüncü mertebeden Runge-Kutta yöntemi olup fark denklemi $j = 0, 1, \dots, M - 1$ için

$$\left. \begin{aligned} w_0 &= \alpha, \\ k_1 &= \Delta x f(x_j, w_j), \\ k_2 &= \Delta x f\left(x_j + \frac{\Delta x}{2}, w_j + \frac{1}{2}k_1\right), \\ k_3 &= \Delta x f\left(x_j + \frac{\Delta x}{2}, w_j + \frac{1}{2}k_2\right), \\ k_4 &= \Delta x f(x_j + \Delta x, w_j + k_3), \\ w_{j+1} &= w_j + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned} \right\} \quad (2.2.15)$$

şeklinde [50, 53].

2.3 Çok Adım Yöntemleri

Önceki kısımdan açıkça görülebileceği gibi tek adım yöntemlerinde x_j düğüm noktasında y_j değeri biliniyorken x_{j+1} düğüm noktasında y_{j+1} değeri bulunur. Çok adım yöntemlerinde ise m adım sayısını göstermek üzere $x_j, x_{j-1}, \dots, x_{j-m+1}$ düğüm noktalarında $y_j, y_{j-1}, \dots, y_{j-m+1}$ değerleri biliniyorken x_{j+1} düğüm noktasında y_{j+1} değeri bulunur. Açık, kapalı veya ikisinin birlikte kullanıldığı çok adım yöntemleri mevcuttur. Bu kısımda açık ve kapalı çok adım yöntemlerinden bazılarının elde edilişi verildi [50].

$y'(x) = f(x, y)$ eşitliğinin $[x_j, x_{j+1}]$ aralığında integrali alınırsa

$$y(x_{j+1}) = y(x_j) + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x, y(x)) dx \quad (2.3.1)$$

denklemi elde edilir. Ancak $y(x)$ çözümü bilinmediğinden $f(x, y(x))$ hesaplanamaz. Bu durumda $f(x, y(x))$ yerine herhangi bir interpolasyon yöntemi kullanılarak elde edilen $P(x)$ interpolasyon polinomunun integrali alınır. Böylece $P(x)$ polinomunun elde edilişine bağlı olarak farklı çok adım yöntemleri mevcuttur.

2.3.1 Açık çok adım (Adams-Bashforth) yöntemleri

İki adım Adams-Bashforth yöntemini elde etmek için $f_j = f(x_j, y_j(x_j))$ olmak üzere (x_j, f_j) ve (x_{j-1}, f_{j-1}) noktalarından geçen interpolasyon polinomunun kullanılması gerekir. Bu polinom da Newton bölünmüş geri farklar yöntemi ile

$$P(x) = f_j + \frac{f_j - f_{j-1}}{\Delta x} (x - x_j) \quad (2.3.2)$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x, y(x)) dx &= \int_{x_j}^{x_{j+1}} P(x) dx \\ &= \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left[f_j + \frac{f_j - f_{j-1}}{\Delta x} (x - x_j) \right] dx\end{aligned}$$

yazılır ve

$$\left. \begin{aligned}x &= x_j + s\Delta x \Rightarrow dx = \Delta x ds \\ x &= x_j \Rightarrow s = 0, \\ x &= x_{j+1} \Rightarrow s = 1\end{aligned} \right\} \quad (2.3.3)$$

dönüşümü yapılarak integralin sonucu

$$\begin{aligned}\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x, y(x)) dx &= \int_0^1 \left(f_j + \frac{f_j - f_{j-1}}{\Delta x} s\Delta x \right) \Delta x ds \\ &= \frac{\Delta x}{2} (3f_j - f_{j-1})\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Elde edilen bu sonuç (2.3.1) denkleminde yerine yazılırsa iki adım Adams-Bashforth yönteminin fark denklemi $j = 1, 2, \dots, M-1$ için

$$\left. \begin{aligned}w_0 &= \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \\ w_{j+1} &= w_j + \frac{\Delta x}{2} (3f_j - f_{j-1})\end{aligned} \right\} \quad (2.3.4)$$

olarak elde edilir. Burada w_0 başlangıç şartından, w_1 herhangi bir tek adım yönteminden elde edilir.

Üç adım Adams-Bashforth yöntemini elde etmek için (x_j, f_j) , (x_{j-1}, f_{j-1}) ve (x_{j-2}, f_{j-2}) noktalarından geçen interpolasyon polinomunun kullanılması gerekir. Bu polinom da Newton bölünmüş geri farklar yöntemi ile

$$P(x) = f_j + \frac{f_j - f_{j-1}}{\Delta x} (x - x_j) + \frac{f_j - 2f_{j-1} + f_{j-2}}{2(\Delta x)^2} (x - x_j) (x - x_{j-1})$$

olduğuna göre

$$\begin{aligned}\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x, y(x)) dx &= \int_{x_j}^{x_{j+1}} P(x) dx \\ &= \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left(f_j + \frac{f_j - f_{j-1}}{\Delta x} (x - x_j) + \frac{f_j - 2f_{j-1} + f_{j-2}}{2(\Delta x)^2} (x - x_j) (x - x_{j-1}) \right) dx\end{aligned}$$

olup (2.3.3) denklemi ile verilen dönüşüm uygulanarak integral hesaplanırsa

$$\begin{aligned}\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x, y(x)) dx &= \int_0^1 \left(f_j + \frac{f_j - f_{j-1}}{\Delta x} s\Delta x + \frac{f_j - 2f_{j-1} + f_{j-2}}{2(\Delta x)^2} \Delta x s \Delta x (s+1) \right) \Delta x ds \\ &= \frac{\Delta x}{12} (23f_j - 16f_{j-1} + 5f_{j-2})\end{aligned}$$

elde edilir ve (2.3.1) denkleminde yerine yazılırsa üç adım Adams-Bashforth yönteminin fark denklemi $j = 2, 3, \dots, M-1$ için

$$\left. \begin{aligned} w_0 &= \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2, \\ w_{j+1} &= w_j + \frac{\Delta x}{12} (23f_j - 16f_{j-1} + 5f_{j-2}) \end{aligned} \right\} \quad (2.3.5)$$

olarak elde edilir. Burada w_0 başlangıç şartından, w_1 ve w_2 herhangi bir tek adım yönteminden elde edilir.

Dört adım Adams-Bashforth yöntemini elde etmek için (x_j, f_j) , (x_{j-1}, f_{j-1}) , (x_{j-2}, f_{j-2}) ve (x_{j-3}, f_{j-3}) noktalarından geçen interpolasyon polinomunun kullanılması gerekir. Bu polinom da Newton bölünmüş geri farklar yöntemi ile

$$\begin{aligned} P(x) &= f_j + \frac{f_j - f_{j-1}}{\Delta x} (x - x_j) + \frac{f_j - 2f_{j-1} + f_{j-2}}{2(\Delta x)^2} (x - x_j) (x - x_{j-1}) \\ &\quad + \frac{f_j - 3f_{j-1} + 3f_{j-2} - f_{j-3}}{6(\Delta x)^3} (x - x_j) (x - x_{j-1}) (x - x_{j-2}) \end{aligned}$$

şeklinde olup

$$\begin{aligned} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x, y(x)) dx &= \int_{x_j}^{x_{j+1}} P(x) dx \\ &= \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left(f_j + \frac{f_j - f_{j-1}}{\Delta x} (x - x_j) + \frac{f_j - 2f_{j-1} + f_{j-2}}{2(\Delta x)^2} (x - x_j) (x - x_{j-1}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{f_j - 3f_{j-1} + 3f_{j-2} - f_{j-3}}{6(\Delta x)^3} (x - x_j) (x - x_{j-1}) (x - x_{j-2}) \right) dx \end{aligned}$$

elde edilir. Bu integral (2.3.3) dönüşümü yapılarak hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x, y(x)) dx &= \int_0^1 \left(f_j + \frac{f_j - f_{j-1}}{\Delta x} s\Delta x + \frac{f_j - 2f_{j-1} + f_{j-2}}{2(\Delta x)^2} s\Delta x\Delta x(s+1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{f_j - 3f_{j-1} + 3f_{j-2} - f_{j-3}}{6(\Delta x)^3} \Delta x s\Delta x(s+1)\Delta x(s+2) \right) \Delta x ds \\ &= \frac{\Delta x}{24} (55f_j - 59f_{j-1} + 37f_{j-2} - 9f_{j-3}) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir ve (2.3.1) denkleminde yerine yazılırsa dört adım Adams-Bashforth yönteminin fark denklemi $j = 3, 4, \dots, M-1$ için

$$\left. \begin{aligned} w_0 &= \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2, \quad w_3 = \alpha_3, \\ w_{j+1} &= w_j + \frac{\Delta x}{24} (55f_j - 59f_{j-1} + 37f_{j-2} - 9f_{j-3}) \end{aligned} \right\} \quad (2.3.6)$$

olarak elde edilir. Burada w_0 başlangıç şartından, w_1, w_2 ve w_3 herhangi bir tek adım yönteminden elde edilir.

$m > 4$ için benzer işlemler yapılarak m -adım Adams-Bashforth yöntemlerinin fark denklemleri elde edilir.

2.3.2 Kapalı çok adım (Adams-Moulton) yöntemleri

İki adım Adams-Moulton yöntemini elde etmek için (x_{j+1}, f_{j+1}) , (x_j, f_j) ve (x_{j-1}, f_{j-1}) noktalarından geçen interpolasyon polinomunun kullanılması gerekir. Bu polinom da Newton bölünmüş geri farklar yöntemi ile

$$P(x) = f_{j+1} + \frac{f_{j+1} - f_j}{\Delta x} (x - x_{j+1}) + \frac{f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}}{2(\Delta x)^2} (x - x_{j+1}) (x - x_j)$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x, y(x)) dx &= \int_{x_j}^{x_{j+1}} P(x) dx \\ &= \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left[f_{j+1} + \frac{f_{j+1} - f_j}{\Delta x} (x - x_{j+1}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}}{2(\Delta x)^2} (x - x_{j+1}) (x - x_j) \right] dx \end{aligned}$$

integrali

$$\left. \begin{aligned} x &= x_{j+1} + s\Delta x \Rightarrow dx = \Delta x ds \\ x &= x_j \Rightarrow s = -1, \\ x &= x_{j+1} \Rightarrow s = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.3.7)$$

dönüşümü yapılarak hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x, y(x)) dx &= \int_{-1}^0 \left(f_{j+1} + \frac{f_{j+1} - f_j}{\Delta x} s\Delta x + \frac{f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}}{2(\Delta x)^2} s\Delta x (s+1)\Delta x \right) \Delta x ds \\ &= \frac{\Delta x}{12} (5f_{j+1} + 8f_j - f_{j-1}) \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Elde edilen bu sonuç (2.3.1) denkleminde yerine yazılırsa iki adım Adams-Moulton yönteminin fark denklemi $j = 1, 2, \dots, M-1$ için

$$\left. \begin{aligned} w_0 &= \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \\ w_{j+1} &= w_j + \frac{\Delta x}{12} (5f_{j+1} + 8f_j - f_{j-1}) \end{aligned} \right\} \quad (2.3.8)$$

olarak elde edilir. Burada w_0 başlangıç şartından, w_1 herhangi bir tek adım yönteminden elde edilir.

Üç adım Adams-Moulton yöntemini elde etmek için (x_{j+1}, f_{j+1}) , (x_j, f_j) , (x_{j-1}, f_{j-1}) ve (x_{j-2}, f_{j-2}) noktalarından geçen interpolasyon polinomunun kullanılması gerekir. Bu polinom

da Newton bölünmüş geri farklar yöntemi ile

$$P(x) = f_{j+1} + \frac{f_{j+1} - f_j}{\Delta x} (x - x_{j+1}) + \frac{f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}}{2(\Delta x)^2} (x - x_{j+1}) (x - x_j) \\ + \frac{f_{j+1} - 3f_j + 3f_{j-1} - f_{j-2}}{6(\Delta x)^3} (x - x_{j+1}) (x - x_j) (x - x_{j-1})$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x, y(x)) dx = \int_{x_j}^{x_{j+1}} P(x) dx \\ = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left(f_{j+1} + \frac{f_{j+1} - f_j}{\Delta x} (x - x_{j+1}) + \frac{f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}}{2(\Delta x)^2} (x - x_{j+1}) (x - x_j) \right. \\ \left. + \frac{f_{j+1} - 3f_j + 3f_{j-1} - f_{j-2}}{6(\Delta x)^3} (x - x_{j+1}) (x - x_j) (x - x_{j-1}) \right) dx$$

olup (2.3.7) denklemi ile verilen dönüşüm uygulanarak integral hesaplanırsa

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x, y(x)) dx = \int_{-1}^0 \left(f_{j+1} + \frac{f_{j+1} - f_j}{\Delta x} s\Delta x + \frac{f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}}{2(\Delta x)^2} s\Delta x (s+1)\Delta x \right. \\ \left. + \frac{f_{j+1} - 3f_j + 3f_{j-1} - f_{j-2}}{6(\Delta x)^3} s\Delta x (s+1)\Delta x (s+2)\Delta x \right) \Delta x ds \\ = \frac{\Delta x}{24} (9f_{j+1} + 19f_j - 5f_{j-1} + f_{j-2})$$

elde edilir ve (2.3.1) denkleminde yerine yazılırsa üç adım Adams-Moulton yönteminin fark denklemi $j = 2, 3, \dots, M-1$ için

$$\left. \begin{aligned} w_0 &= \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2, \\ w_{j+1} &= w_j + \frac{\Delta x}{24} (9f_{j+1} + 19f_j - 5f_{j-1} + f_{j-2}) \end{aligned} \right\} \quad (2.3.9)$$

olarak elde edilir. Burada w_0 başlangıç şartından, w_1 ve w_2 herhangi bir tek adım yönteminden elde edilir.

Dört adım Adams-Moulton yöntemini elde etmek için (x_{j+1}, f_{j+1}) , (x_j, f_j) , (x_{j-1}, f_{j-1}) , (x_{j-2}, f_{j-2}) ve (x_{j-3}, f_{j-3}) noktalarından geçen interpolasyon polinomunun kullanılması gerekir. Bu polinom da Newton bölünmüş geri farklar yöntemi ile

$$P(x) = f_{j+1} + \frac{f_{j+1} - f_j}{\Delta x} (x - x_{j+1}) + \frac{f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}}{2(\Delta x)^2} (x - x_{j+1}) (x - x_j) \\ + \frac{f_{j+1} - 3f_j + 3f_{j-1} - f_{j-2}}{6(\Delta x)^3} (x - x_{j+1}) (x - x_j) (x - x_{j-1}) \\ + \frac{f_{j+1} - 4f_j + 6f_{j-1} - 4f_{j-2} + f_{j-3}}{24(\Delta x)^4} (x - x_{j+1}) (x - x_j) (x - x_{j-1}) (x - x_{j-2})$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x, y(x)) dx &= \int_{x_j}^{x_{j+1}} P(x) dx \\
&= \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left(f_{j+1} + \frac{f_{j+1} - f_j}{\Delta x} (x - x_{j+1}) + \frac{f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}}{2(\Delta x)^2} (x - x_{j+1})(x - x_j) \right. \\
&\quad + \frac{f_{j+1} - 3f_j + 3f_{j-1} - f_{j-2}}{6(\Delta x)^3} (x - x_{j+1})(x - x_j)(x - x_{j-1}) \\
&\quad \left. + \frac{f_{j+1} - 4f_j + 6f_{j-1} - 4f_{j-2} + f_{j-3}}{24(\Delta x)^4} (x - x_{j+1})(x - x_j)(x - x_{j-1})(x - x_{j-2}) \right) dx
\end{aligned}$$

olup (2.3.7) denklemi ile verilen dönüşüm uygulanarak integral hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x, y(x)) dx &= \int_{-1}^0 \left(f_{j+1} + \frac{f_{j+1} - f_j}{\Delta x} s\Delta x + \frac{f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}}{2(\Delta x)^2} s\Delta x(s+1)\Delta x \right. \\
&\quad + \frac{f_{j+1} - 3f_j + 3f_{j-1} - f_{j-2}}{6(\Delta x)^3} s\Delta x(s+1)\Delta x(s+2)\Delta x \\
&\quad \left. + \frac{f_{j+1} - 4f_j + 6f_{j-1} - 4f_{j-2} + f_{j-3}}{24(\Delta x)^4} s\Delta x(s+1)\Delta x(s+2)\Delta x(s+3)\Delta x \right) \Delta x ds \\
&= \frac{\Delta x}{720} (251f_{j+1} + 646f_j - 264f_{j-1} + 106f_{j-2} - 19f_{j-3})
\end{aligned}$$

elde edilir ve (2.3.1) denklemine yerine yazılırsa dört adım Adams-Moulton yönteminin fark denklemi $j = 3, 4, \dots, M-1$ için

$$\left. \begin{aligned} w_0 &= \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2, \quad w_3 = \alpha_3, \\ w_{j+1} &= w_j + \frac{\Delta x}{720} (251f_{j+1} + 646f_j - 264f_{j-1} + 106f_{j-2} - 19f_{j-3}) \end{aligned} \right\} \quad (2.3.10)$$

olarak elde edilir. Burada w_0 başlangıç şartından, w_1, w_2 ve w_3 herhangi bir tek adım yönteminden elde edilir.

$m > 4$ için benzer işlemler yapılarak m -adım Adams-Moulton yöntemleri elde edilir.

3. DÜZENLİ UZUN DALGA (RLW) DENKLEMİ

Bu bölümde, ε ve μ pozitif parametreler olmak üzere

$$U_t + U_x + \varepsilon U U_x - \mu U_{xxt} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 \leq t \leq T$$

şeklinde verilen RLW denklemi $x \rightarrow \pm\infty$ iken $U \rightarrow 0$, $U_x \rightarrow 0$, $U_{xx} \rightarrow 0$ fiziksel sınır şartları ve

$$U(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty$$

başlangıç şartı ile göz önüne alınarak RLW denkleminin korunum sabitleri, test problemleri ve test problemlerinin korunum sabitleri verildi. RLW denkleminde x ve t değişkenleri sırasıyla konum ve zamanı, $U(x, t)$ dalga'nın yüksekliğini temsil etmektedir. RLW denkleminin analitik çözümü sınırlı sayıda başlangıç şartı için mevcuttur. RLW denkleminde herhangi bir sayısal yöntemi uygulayabilmek için sonlu bir konum aralığı gerektiğinden yukarıda verilen fiziksel sınır şartları yerine $\lim_{x \rightarrow a} U(x, t) \cong 0$, $\lim_{x \rightarrow b} U(x, t) \cong 0$ olacak şekilde $[a, b]$ aralığı belirlenerek aşağıdaki şekilde düzenlenen başlangıç-sınır değer problemi alınır:

$$U_t + U_x + \varepsilon U U_x - \mu U_{xxt} = 0, \quad a \leq x \leq b, \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.0.1)$$

$$U(x, 0) = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (3.0.2)$$

$$\left. \begin{array}{l} U(a, t) = U(b, t) = 0 \\ U_x(a, t) = U_x(b, t) = 0 \\ U_{xx}(a, t) = U_{xx}(b, t) = 0 \end{array} \right\}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.0.3)$$

3.1 RLW Denkleminin Korunum Sabitleri

$x, t \in \mathbb{R}$ bağımsız değişkenler ve $U(x, t) \in \mathbb{R}$ bağımlı değişken olmak üzere

$$f(x, t, U(x, t), U_x(x, t), U_t(x, t), \dots) = 0$$

bağıntısı ile verilen bir kısmi diferansiyel denklem

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} + \frac{\partial X_i}{\partial x} = 0 \quad (3.1.1)$$

şeklinde yazılarak $(-\infty, \infty)$ aralığında integrali alındığında $X_i(x, t)|_{-\infty}^{+\infty} = 0$ oluyorsa

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} T_i(x, t) dx = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} T_i(x, t) dx = \text{sabit}$$

olarak elde edilir. Bu sabite verilen kısmi diferansiyel denklemin korunum sabiti denir [55].

RLW denklemi için üç korunum sabiti vardır. Bunlar kütle, momentum ve enerji korunum sabitleri olarak bilinir ve sırasıyla

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} U dx \quad (3.1.2)$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(U^2 + \mu (U_x)^2 \right) dx \quad (3.1.3)$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} (U^3 + 3U^2) dx \quad (3.1.4)$$

şeklinde [56, 57]. Bu korunum sabitlerindeki integraller, $[a, b]$ aralığında birleşik yamuk yöntemi ile

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} U dx \cong \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^{M-1} [W_j + W_{j+1}]$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(U^2 + \mu (U_x)^2 \right) dx \cong \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^{M-1} \left[(W_j)^2 + \mu \left((W_x)_j \right)^2 + (W_{j+1})^2 + \mu \left((W_x)_{j+1} \right)^2 \right]$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} (U^3 + 3U^2) dx \cong \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^{M-1} \left[(W_j)^3 + 3(W_j)^2 + (W_{j+1})^3 + 3(W_{j+1})^2 \right]$$

şeklinde hesaplandı.

3.2 Test Problemleri ve Korunum Sabitleri

Bu kısımda RLW denkleminin en yaygın olarak kullanılan test problemlerinden bir soliter dalganın hareketi ve iki soliter dalganın hareketi problemleri verildi.

3.2.1 Bir soliter dalganın hareketi

(3.0.1) denklemi ile verilen RLW denkleminin

$$U(x, 0) = 3c \operatorname{sech}^2[k(x - x_0)]$$

başlangıç şartı için analitik çözümü $v = 1 + \varepsilon c$, $k = \sqrt{\varepsilon c / (4\mu v)}$ olmak üzere

$$U(x, t) = 3c \operatorname{sech}^2[k(x - x_0 - vt)]$$

dir [1]. Bir soliter dalga hareketinin fiziksel sınır şartları $x \rightarrow \pm\infty$ için $U \rightarrow 0$, $U_x \rightarrow 0$, $U_{xx} \rightarrow 0$ dir. Bu problem başlangıç anında x_0 noktasında $3c$ genliğine sahip v hızıyla sağa doğru hareket eden bir soliter dalganın hareketini temsil etmektedir.

(3.1.2) denkleminde bir soliter dalga hareketinin $t = 0$ anında kütle korunum sabitinin analitik değeri

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, 0) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} 3c \operatorname{sech}^2[k(x - x_0)] dx \end{aligned}$$

integralinin değeridir. Bu integralde $z = \tanh[k(x - x_0)]$, $dz = k \operatorname{sech}^2[k(x - x_0)] dx$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{3c}{k} \int_{-1}^1 dz \\ &= \frac{6c}{k} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

(3.1.3) denklemi kullanılarak momentum korunum sabitinin analitik değeri

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(U^2(x, 0) + \mu (U_x(x, 0))^2 \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(9c^2 \operatorname{sech}^4[k(x - x_0)] + \mu 36c^2 k^2 \operatorname{sech}^4[k(x - x_0)] \tanh^2[k(x - x_0)] \right) dx \end{aligned}$$

integralinden hesaplanır. Bu integralde $z = \tanh[k(x - x_0)]$, $dz = k \operatorname{sech}^2[k(x - x_0)] dx$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{9c^2}{k} \int_{-1}^1 \left[(1 - z^2) + 4\mu k^2 (1 - z^2) z^2 \right] dz \\ &= \frac{12c^2}{k} + \frac{48kc^2\mu}{5} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

(3.1.4) denklemi kullanılarak enerji korunum sabitinin analitik değeri

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(U^3(x, 0) + 3U^2(x, 0) \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(27c^3 \operatorname{sech}^6[k(x - x_0)] + 27c^2 \operatorname{sech}^4[k(x - x_0)] \right) dx \end{aligned}$$

integralinden hesaplanır. Bu integralde $z = \tanh[k(x - x_0)]$, $dz = k \operatorname{sech}^2[k(x - x_0)] dx$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{27c^2}{k} \int_{-1}^1 \left[c(1 - z^2)^2 + 1 - z^2 \right] dz \\ &= \frac{36c^2}{k} \left(1 + \frac{4c}{5} \right) \end{aligned}$$

olarak elde edilir [58].

3.2.2 İki soliter dalğanın hareketi

(3.0.1) denklemi ile verilen RLW denklemi

$$k_i = \sqrt{\frac{\varepsilon c_i}{4\mu(1 + \varepsilon c_i)}}, \quad (i = 1, 2)$$

olmak üzere

$$U(x, 0) = 3c_1 \sec h^2[k_1(x - x_1)] + 3c_2 \sec h^2[k_2(x - x_2)]$$

başlangıç şartı ve $x \rightarrow \pm\infty$ iken $U \rightarrow 0$, $U_x \rightarrow 0$, $U_{xx} \rightarrow 0$ fiziksel sınır şartları ile verildi. Bu problemin analitik çözümü mevcut değildir. Problem başlangıç anında x_1 ve x_2 noktalarında sırasıyla $3c_1$ ve $3c_2$ genliklerine sahip iki soliter dalğanın birbirlerine göre hareketlerini temsil etmektedir. Genliği büyük olan dalğanın hızı da daha büyük olduğundan iki soliter dalğanın birbiri içinden geçebilmesi için $c_1 < c_2$ iken $x_2 < x_1$ olmalıdır. İki soliter dalga hareketi problemi için korunum sabitlerinin analitik değerleri de bir soliter dalga hareketine benzer şekilde

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{6c_1}{k_1} + \frac{6c_2}{k_2}, \\ I_2 &= \frac{12c_1^2}{k_1} + \frac{48k_1c_1^2\mu}{5} + \frac{12c_2^2}{k_2} + \frac{48k_2c_2^2\mu}{5}, \\ I_3 &= \frac{36c_1^2}{k_1} \left(1 + \frac{4c_1}{5}\right) + \frac{36c_2^2}{k_2} \left(1 + \frac{4c_2}{5}\right) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

4. RLW DENKLEMİNİN SONLU FARK YÖNTEMİ İLE BİR SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde (3.0.1) denklemi ile verilen RLW denklemi Crank-Nicolson tipi sonlu fark yaklaşımı kullanılarak ayrıklaştırıldıktan sonra denklemde bulunan UU_x lineer olmayan terimine Rubin-Graves lineerleştirmesi yapılarak bir sayısal şema elde edildi. Elde edilen sayısal şema Bölüm 3'te tanımlanan iki test problemine uygulandı ve elde edilen sayısal sonuçların doğruluğunu görmek için (x_j, t_n) düğüm noktasında RLW denkleminin analitik ve yaklaşık çözümleri sırasıyla $U(x_j, t_n)$ ve W_j^n olmak üzere

$$L_\infty = \max_j |U(x_j, t_n) - W_j^n| \quad (4.0.1)$$

ve

$$L_2 = \sqrt{\Delta x \sum_{j=1}^M |U(x_j, t_n) - W_j^n|^2} \quad (4.0.2)$$

şeklinde tanımlanan mutlak hata ve ortalama hata normları hesaplandı. Ayrıca I_1 (kütle), I_2 (momentum) ve I_3 (enerji) korunum sabitleri hesaplanarak $i = 1, 2, 3$ için korunum sabitlerinin analitik ve yaklaşık değerleri sırasıyla I_i ve $\tilde{I}_i$ olmak üzere $\Delta I_i = |I_i - \tilde{I}_i|$ olarak tanımlanan mutlak değişim miktarları hesaplandı.

4.1 Şema-1

Bu kısımda Ref. [46] çalışmasında yapılabenzer şekilde RLW denkleminin lineer olmayan terimi yerine aşağıda ayrıntılı olarak verilen Rubin-Graves tipi sonlu fark yaklaşımı yazıldı ve sayısal çözümleri elde edildi. (3.0.1)-(3.0.3) denklemleri ile verilen başlangıç-sınır değer probleminin çözüm bölgesi $[a, b] \times [0, T]$ olup $[a, b]$ konum aralığı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{M-1} < x_M = b$ şeklinde M eşit parçaya, $[0, T]$ zaman aralığı $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = T$ şeklinde N eşit parçaya bölünsün. Konum ve zaman yönündeki adım uzunlukları sırasıyla $\Delta x = x_{j+1} - x_j$, $j = 0, 1, \dots, M-1$; $\Delta t = t_{n+1} - t_n$, $n = 0, 1, \dots, N-1$ olsun.

Lemma 4.1.1. (Rubin-Graves lineerleştirmesi) $p = 1, 2, \dots$ için

$$(U^p U_x)^{n+1} \approx (U^p)^n U_x^{n+1} + p (U^{p-1})^n U_x^n U^{n+1} - p (U^p)^n U_x^n$$

dir [59, 60].

İspat: $U^p U_x$ fonksiyonu (x, t_n) noktası civarında Taylor serisi

$$(U^p U_x)(x, t) = (U^p U_x)(x, t_n) + (t - t_n) \frac{\partial (U^p U_x)}{\partial t}(x, t_n) + O((\Delta t)^2)$$

olduğuna göre bu seride t yerine t_{n+1} yazılırsa

$$(U^p U_x)(x, t_{n+1}) = (U^p U_x)^n + \Delta t (p U^{p-1} U_t U_x + U^p U_{xt})^n + O((\Delta t)^2)$$

elde edilir. Burada $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ dir. t değişkenine göre türevler yerine ileri sonlu fark yaklaşımı yazılırsa

$$\begin{aligned} (U^p U_x)^{n+1} &= (U^p U_x)^n + \Delta t p (U^{p-1})^n U_x^n \left(\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \right) \\ &\quad + \Delta t \left((U^p)^n \frac{U_x^{n+1} - U_x^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \right) + O((\Delta t)^2) \\ &= (U^p)^n U_x^{n+1} + p (U^{p-1})^n U_x^n U^{n+1} - p (U^p)^n U_x^n + O((\Delta t)^2) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte $p = 1$ alınıp $O((\Delta t)^2)$ kesme hatası ihmal edilirse Rubin-Graves lineerleştirmesi

$$(U U_x)_j^{n+1} \cong U_j^n (U_x)_j^{n+1} + U_j^{n+1} (U_x)_j^n - U_j^n (U_x)_j^n \quad (4.1.1)$$

şeklinde elde edilir.

(3.0.1) denklemi ile verilen RLW denklemine Crank-Nicolson ayrıklaştırması uygulanırsa

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + \frac{(U_x)_j^{n+1} + (U_x)_j^n}{2} + \varepsilon \frac{(U U_x)_j^{n+1} + (U U_x)_j^n}{2} - \mu \frac{(U_{xx})_j^{n+1} - (U_{xx})_j^n}{\Delta t} = 0 \quad (4.1.2)$$

denklemi elde edilir. (4.1.2) denklemindeki $(U U_x)_j^{n+1}$ nonlineer terimini lineerleştirmek için (4.1.1) eşitliği ile verilen Rubin-Graves lineerleştirmesi yazılarak düzenlenirse

$$\begin{aligned} U_j^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} (U_x)_j^{n+1} + \frac{\varepsilon \Delta t}{2} \left(U_j^{n+1} (U_x)_j^n + U_j^n (U_x)_j^{n+1} \right) - \mu (U_{xx})_j^{n+1} \\ = U_j^n - \frac{\Delta t}{2} (U_x)_j^n - \mu (U_{xx})_j^n \end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra bu denklemde bulunan U_x , U_{xx} türevlerinin yerine üç nokta merkezi sonlu fark yaklaşımları yazılırsa

$$\begin{aligned} W_j^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \frac{W_{j+1}^{n+1} - W_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{\varepsilon \Delta t}{2} \left(W_j^{n+1} (W_x)_j^n + W_j^n \frac{W_{j+1}^{n+1} - W_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) \\ - \mu \frac{W_{j-1}^{n+1} - 2W_j^{n+1} + W_{j+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} = W_j^n - \frac{\Delta t}{2} \frac{W_{j+1}^n - W_{j-1}^n}{2\Delta x} - \mu \frac{W_{j-1}^n - 2W_j^n + W_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler $n + 1$ ve n zaman seviyelerine göre düzenlenirse

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{\Delta t}{4\Delta x} - \frac{\varepsilon \Delta t}{4\Delta x} W_j^n - \frac{\mu}{(\Delta x)^2} \right) W_{j-1}^{n+1} + \left(1 + \frac{\varepsilon \Delta t}{2} (W_x)_j^n + \frac{2\mu}{(\Delta x)^2} \right) W_j^{n+1} \\ & + \left(\frac{\Delta t}{4\Delta x} + \frac{\varepsilon \Delta t}{4\Delta x} W_j^n - \frac{\mu}{(\Delta x)^2} \right) W_{j+1}^{n+1} = \left(\frac{\Delta t}{4\Delta x} - \frac{\mu}{(\Delta x)^2} \right) W_{j-1}^n \\ & + \left(1 + \frac{2\mu}{(\Delta x)^2} \right) W_j^n + \left(-\frac{\Delta t}{4\Delta x} - \frac{\mu}{(\Delta x)^2} \right) W_{j+1}^n \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerdeki katsayılar

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{\Delta t}{4\Delta x} - \frac{\varepsilon \Delta t}{4\Delta x} W_j^n - \frac{\mu}{(\Delta x)^2}, & B_1 &= \frac{\Delta t}{4\Delta x} - \frac{\mu}{(\Delta x)^2}, \\ A_2 &= 1 + \frac{\varepsilon \Delta t}{2} (W_x)_j^n + \frac{2\mu}{(\Delta x)^2}, & B_2 &= 1 + \frac{2\mu}{(\Delta x)^2}, \\ A_3 &= \frac{\Delta t}{4\Delta x} + \frac{\varepsilon \Delta t}{4\Delta x} W_j^n - \frac{\mu}{(\Delta x)^2}, & B_3 &= -\frac{\Delta t}{4\Delta x} - \frac{\mu}{(\Delta x)^2} \end{aligned}$$

olarak tanımlanırsa $j = 1, 2, \dots, M - 1$ ve $n = 0, 1, 2, \dots, N$ için

$$A_1 W_{j-1}^{n+1} + A_2 W_j^{n+1} + A_3 W_{j+1}^{n+1} = B_1 W_{j-1}^n + B_2 W_j^n + B_3 W_{j+1}^n \quad (4.1.3)$$

denklemleri ile bilinmeyenleri $W_0^{n+1}, W_1^{n+1}, \dots, W_M^{n+1}$ olmak üzere $M + 1$ tane bilinmeyen ve $M - 1$ tane denklemden oluşan bir lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözülebilmesi için bilinmeyen sayısı ile denklem sayısı birbirine eşit olmalıdır. W_0 ve W_M bilinmeyenleri (3.0.3) denklemleri ile verilen sınır şartlarından

$$\begin{aligned} U(x_0, t) &= 0 \Rightarrow W_0 = 0 \\ U(x_M, t) &= 0 \Rightarrow W_M = 0 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. W_0 ve W_M değerleri (4.1.3) denklemleri ile verilen denklem sisteminde yerlerine yazılırsa $M - 1$ bilinmeyen ve $M - 1$ denklemden oluşan bir lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir. Elde edilen bu denklem sistemi

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_2 & A_3 & & & \\ A_1 & A_2 & A_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & A_1 & A_2 & A_3 \\ & & & A_1 & A_2 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} B_2 & B_3 & & & \\ B_1 & B_2 & B_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & B_1 & B_2 & B_3 \\ & & & B_1 & B_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{W} = [W_1 \quad W_2 \quad \dots \quad W_{M-1}]^T$$

olmak üzere matris formunda

$$\mathcal{A} \mathbf{W}^{n+1} = \mathcal{B} \mathbf{W}^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N - 1 \quad (4.1.4)$$

şeklinde yazılır. $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ matrislerinin boyutu $(M-1) \times (M-1)$ olup $\mathbf{W}$ matrisinin boyutu $(M-1) \times 1$ dir. $n = 0$ için (3.0.2) denklemi ile verilen başlangıç şartından

$$\mathbf{W}^0 = [f(x_1) \quad f(x_2) \quad \cdots \quad f(x_{M-1})]^T$$

şeklinde hesaplanır. Daha sonra (4.1.4) denkleminde işlemler ardışık olarak tekrarlanarak problemin yaklaşık çözümleri istenilen zaman adımına kadar hesaplanır.



Çizelge 4.1 : Şema-1 ile bir soliter dalganın $c = 0.1$ için korunum sabitleri ve hata normları : $\Delta t = 0.1, \Delta x = 0.1, 0.05, 0.025$

Δx	t	I_1	I_2	I_3	L_2	L_∞
0.1	5	3.9799497485	0.8104593592	2.5790074222	$1.4024101595e-4$	$5.3625458651e-5$
	10	3.9799497486	0.8104593510	2.5790073816	$2.7759133560e-4$	$1.0753292623e-4$
	15	3.9799497487	0.8104593391	2.5790073234	$4.1006992398e-4$	$1.5774265255e-4$
	20	3.9799497488	0.8104593252	2.5790072553	$5.3677822038e-4$	$2.0353303231e-4$
0.05	5	3.9799497485	0.8104617101	2.5790074326	$7.5434674496e-5$	$2.8735294624e-5$
	10	3.9799497487	0.8104617074	2.5790074205	$1.4938049245e-4$	$5.7664893614e-5$
	15	3.9799497488	0.8104617035	2.5790074031	$2.2080722377e-4$	$8.4702293858e-5$
	20	3.9799497489	0.8104616990	2.5790073826	$2.8923771413e-4$	$1.0942814618e-4$
0.025	5	3.9799497485	0.8104622978	2.5790074342	$5.9238245026e-5$	$2.2511097553e-5$
	10	3.9799497487	0.8104622960	2.5790074267	$1.1733613510e-4$	$4.5196599188e-5$
	15	3.9799497489	0.8104622935	2.5790074157	$1.7350039794e-4$	$6.6438559717e-5$
	20	3.9799497490	0.8104622905	2.5790074028	$2.2735944496e-4$	$8.5894094947e-5$
Analitik Çözüm		3.9799497484	0.8104624942	2.5790074370		

4.2 Şema-1'in Test Problemlerine Uygulanması

Bu kısımda (3.0.1) denklemini ile verilen RLW denkleminde $\varepsilon = \mu = 1$ alınarak bir ve iki soliter dalganın hareketi problemlerine Şema-1 uygulanarak elde edilen sayısal sonuçların L_2 ve L_∞ hata normları; I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitleri; korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları çeşitli konum ve zaman adım uzunlukları için hesaplanarak çizelgeler halinde verildi. Ayrıca, çeşitli grafikler çizilerek test problemlerinin fiziksel davranışları gözlemlendi.

4.2.1 Bir soliter dalganın hareketi

Bu kısımda $x_0 = 0$ olmak üzere sırasıyla $c = 0.1$ ve $c = 0.03$ için $[-80, 120]$ konum aralığında Şema-1 uygulanarak elde edilen sayısal sonuçlarla bir soliter dalganın hareketi $[0, 20]$ zaman aralığında incelendi.

Durum 1 : Bu durumda $c = 0.1$ olarak alındı. İlk olarak bir soliter dalganın hareketi $\Delta t = 0.1$ ve $\Delta x = 0.1, 0.05, 0.025$ adım uzunlukları için $t = 5, 10, 15, 20$ zamanlarında Şema-1 ile elde edilen sayısal sonuçların korunum sabitleri ve hata normları Çizelge 4.1'de ve $t = 20$ zamanında korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları Çizelge 4.2'de verildi. Çizelge 4.1'den zaman ilerledikçe hata normlarının arttığı $\Delta x \rightarrow 0$ için $L_2 \rightarrow 0$, $L_\infty \rightarrow 0$ olduğu ve korunum sabitlerinin analitik değerleri ile uyumlu olduğu görüldü. Çizelge 4.2 incelendiğinde $\Delta x \rightarrow 0$ için kütle korunum sabitinin mutlak değişim miktarında çok az bir artış olduğu, momentum ve enerji korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarlarının küçüldüğü ve sonuç olarak korunum sabitlerinin oldukça iyi bir şekilde korunduğu görüldü.

Çizelge 4.2 : Şema-1 ile bir soliter dalğanın $c = 0.1$ için korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta t = 0.1, \Delta x = 0.1, 0.05, 0.025$

Δx	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3
0.1	$3.8388936474e - 10$	$3.1690555078e - 6$	$1.8164913840e - 7$
0.05	$5.0836446164e - 10$	$7.9524270913e - 7$	$5.4359184265e - 8$
0.025	$5.8767302136e - 10$	$2.0376146515e - 7$	$3.4134141291e - 8$

Çizelge 4.3 : Şema-1 ile bir soliter dalğanın $c = 0.1$ için korunum sabitleri ve hata normları : $\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.1, 0.05, 0.025$

Δt	t	I_1	I_2	I_3	L_2	L_∞
0.1	5	3.9799497485	0.8104593592	2.5790074222	$1.4024101595e - 4$	$5.3625458651e - 5$
	10	3.9799497486	0.8104593510	2.5790073816	$2.7759133560e - 4$	$1.0753292623e - 4$
	15	3.9799497487	0.8104593391	2.5790073234	$4.1006992398e - 4$	$1.5774265255e - 4$
	20	3.9799497488	0.8104593252	2.5790072553	$5.3677822038e - 4$	$2.0353303231e - 4$
0.05	5	3.9799497485	0.8104593608	2.5790074296	$9.9919615577e - 5$	$3.8319371847e - 5$
	10	3.9799497486	0.8104593571	2.5790074095	$1.9772136450e - 4$	$7.6786316934e - 5$
	15	3.9799497487	0.8104593517	2.5790073807	$2.9196223712e - 4$	$1.1253821363e - 4$
	20	3.9799497488	0.8104593453	2.5790073472	$3.8199587744e - 4$	$1.4508577504e - 4$
0.025	5	3.9799497485	0.8104593611	2.5790074311	$8.9839892082e - 5$	$3.4491749367e - 5$
	10	3.9799497486	0.8104593583	2.5790074150	$1.7775459759e - 4$	$6.9097332457e - 5$
	15	3.9799497487	0.8104593541	2.5790073920	$2.6243540516e - 4$	$1.0123323187e - 4$
	20	3.9799497488	0.8104593492	2.5790073652	$3.4329905183e - 4$	$1.3046814886e - 4$
Analitik Çözüm		3.9799497484	0.8104624942	2.5790074370		

Daha sonra bir soliter dalğanın hareketi $t = 5, 10, 15, 20$ zamanlarında $\Delta x = 0.1$ ve $\Delta t = 0.1, 0.05, 0.025$ adım uzunlukları için Şema-1 ile elde edilen sayısal sonuçların korunum sabitleri ve hata normları Çizelge 4.3'te ve $t = 20$ zamanında korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları Çizelge 4.4'te verildi. Çizelge 4.3'ten zaman ilerledikçe hata normlarının arttığı, $\Delta t \rightarrow 0$ için $L_2 \rightarrow 0$, $L_\infty \rightarrow 0$ ve korunum sabitlerinin analitik değerleri ile uyumlu olduğu görüldü. Çizelge 4.4'ten $\Delta t \rightarrow 0$ için kütle ve momentum korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarlarının hemen hemen aynı kaldığı, enerji korunum sabitinin mutlak değişim miktarının küçüldüğü ve sonuç olarak korunum sabitlerinin iyi bir şekilde korunduğu görüldü.

Son olarak bir soliter dalğanın hareketi $t = 5, 10, 15, 20$ zamanlarında $\Delta x = \Delta t = 0.2, 0.1, 0.05, 0.025$ adım uzunlukları için Şema-1 ile elde edilen sayısal sonuçların korunum sabitleri ve hata normları Çizelge 4.5'te ve $t = 20$ zamanında korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları Çizelge 4.6'da verildi. Çizelge 4.5'ten zaman ilerledikçe hata normlarının biraz büyüdüğü, $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$ için $L_2 \rightarrow 0$, $L_\infty \rightarrow 0$ ve korunum sabitlerinin analitik değerleri ile uyumlu olduğu görüldü. Çizelge 4.6 incelendiğinde kütle korunum sabitinin mutlak değişim miktarında küçük bir artış olmasına rağmen momentum ve enerji korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarlarının küçüldüğü ve sonuçta bütün korunum sabitlerinin oldukça iyi bir şekilde korunduğu görüldü.

Çizelge 4.4 : Şema-1 ile bir soliter dalganın $c = 0.1$ için korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.1, 0.05, 0.025$

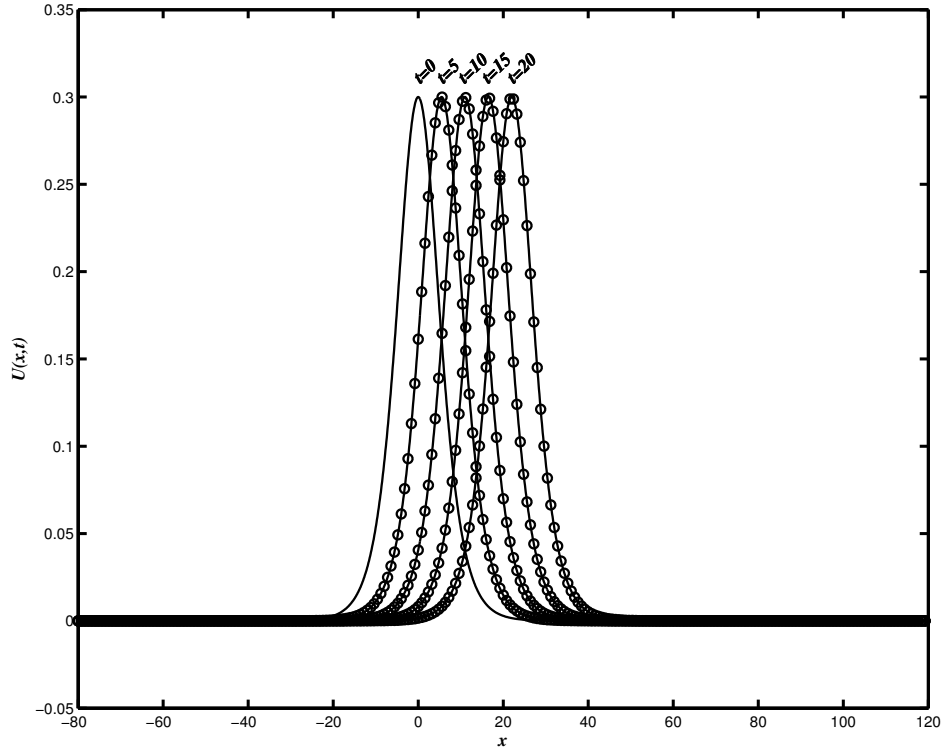
Δt	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3
0.1	$3.8388936474e - 10$	$3.1690555078e - 6$	$1.8164913840e - 7$
0.05	$3.8390579604e - 10$	$3.1488831277e - 6$	$8.9749384369e - 8$
0.025	$3.8415226555e - 10$	$3.1450251298e - 6$	$7.1744107100e - 8$

Çizelge 4.5 : Şema-1 ile bir soliter dalganın $c = 0.1$ için korunum sabitleri ve hata normları : $\Delta x = \Delta t = 0.2, 0.1, 0.05, 0.025$

$\Delta x = \Delta t$	t	I_1	I_2	I_3	L_2	L_∞
0.2	5	3.9799497485	0.8104499248	2.5790072010	$5.6016369594e - 4$	$2.1415144736e - 4$
	10	3.9799497486	0.8104497939	2.5790065553	$1.1085457310e - 3$	$4.2938157381e - 4$
	15	3.9799497486	0.8104496057	2.5790056311	$1.6371288567e - 3$	$6.2954904633e - 4$
	20	3.9799497487	0.8104493844	2.5790045505	$2.1423348485e - 3$	$8.1161586199e - 4$
0.1	5	3.9799497485	0.8104593592	2.5790074222	$1.4024101595e - 4$	$5.3625458651e - 5$
	10	3.9799497486	0.8104593510	2.5790073816	$2.7759133560e - 4$	$1.0753292623e - 4$
	15	3.9799497487	0.8104593391	2.5790073234	$4.1006992398e - 4$	$1.5774265255e - 4$
	20	3.9799497488	0.8104593252	2.5790072553	$5.3677822038e - 4$	$2.0353303231e - 4$
0.05	5	3.9799497485	0.8104617109	2.5790074361	$3.5072795957e - 5$	$1.3412655418e - 5$
	10	3.9799497487	0.8104617104	2.5790074335	$6.9426338126e - 5$	$2.6894881762e - 5$
	15	3.9799497488	0.8104617097	2.5790074299	$1.0256683331e - 4$	$3.9457708303e - 5$
	20	3.9799497489	0.8104617088	2.5790074256	$1.3426940273e - 4$	$5.0919407675e - 5$
0.025	5	3.9799497485	0.8104622984	2.5790074369	$8.7689835848e - 6$	$3.3535139791e - 6$
	10	3.9799497487	0.8104622984	2.5790074368	$1.7358367264e - 5$	$6.7245565470e - 6$
	15	3.9799497489	0.8104622983	2.5790074365	$2.5644794890e - 5$	$9.8661505072e - 6$
	20	3.9799497490	0.8104622983	2.5790074363	$3.3572031867e - 5$	$1.2732178791e - 5$
Analitik Çözüm		3.9799497484	0.8104624942	2.5790074370		

Çizelge 4.6 : Şema-1 ile bir soliter dalganın $c = 0.1$ için korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta x = \Delta t = 0.2, 0.1, 0.05, 0.025$

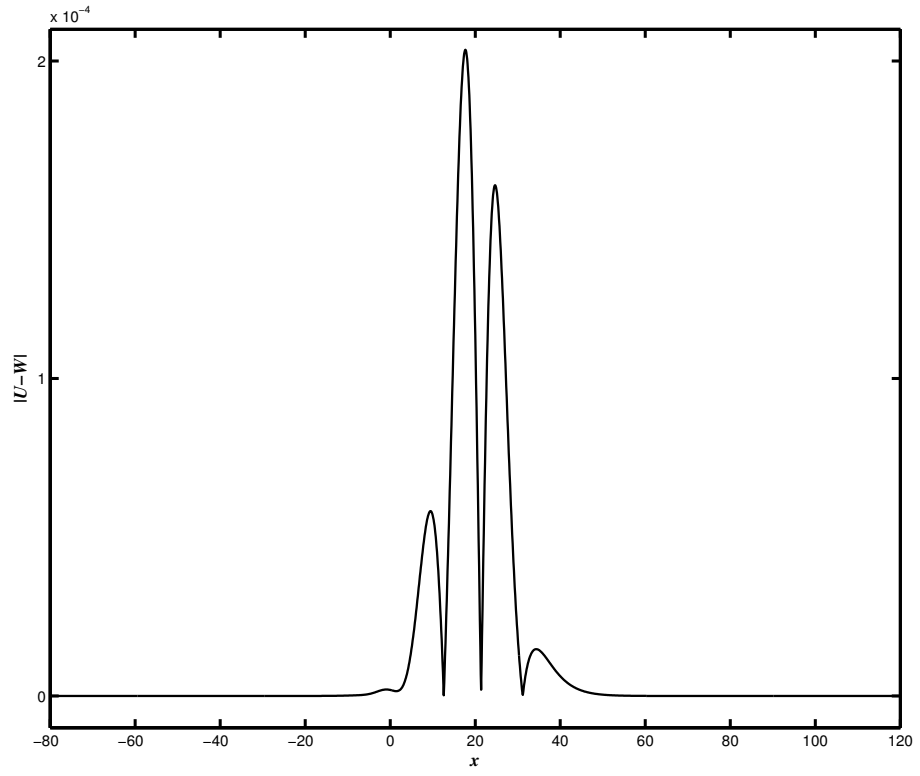
$\Delta x = \Delta t$	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3
0.2	$2.2403012778e - 10$	$1.3109790418e - 5$	$2.8865149222e - 6$
0.1	$3.8388936474e - 10$	$3.1690555078e - 6$	$1.8164913840e - 7$
0.05	$5.0838178112e - 10$	$7.8542985715e - 7$	$1.1373007425e - 8$
0.025	$5.8670179826e - 10$	$1.9592973999e - 7$	$7.1229377951e - 10$



Şekil 4.1 : Şema-1 ile bir soliter dalganın çeşitli zamanlarda yaklaşık ($\circ$) ve analitik çözümleri ($-$) : $c = 0.1$, $\Delta x = \Delta t = 0.1$

Bir soliter dalganın hareketi $t = 5, 10, 15, 20$ zamanlarında $\Delta t = 0.1$ ve $\Delta x = 0.1$ adım uzunlukları için Şema-1 ile elde edilen sayısal çözümü ile analitik çözümünün grafikleri Şekil 4.1’de ve $t = 20$ zamanında mutlak hatanın grafiği Şekil 4.2’de verildi. Şekil 4.1’den sayısal çözüm ile analitik çözümün grafiklerinin çakıştığı görüldü ve $t = 0$ zamanında $x = 0$ konumunda dalganın genliği $3c = 0.3$ iken $t = 5, 10, 15, 20$ zamanlarında dalganın genliği sırasıyla $x = 5.6, 11.1, 16.6, 22.1$ konumlarında $3c = 0.2999940120, 0.2999803806, 0.2999645479, 0.2999488126$ olarak elde edildi. Böylece $[0, 20]$ zaman aralığında dalganın genliğinin başlangıç zamanındaki genliği ile uyumlu olduğu ve bir soliter dalganın zamanla şeklini bozmadan $v = 1.105$ hızıyla sağa doğru hareket ettiği görüldü. Şekil 4.2’den Şema-1’in mutlak hatasının en büyük değerinin konum aralığının ortalarında ve Çizelge 4.1 ile uyumlu olduğu görüldü.

Durum 2: Bu durumda $c = 0.03$ olarak alındı. İlk olarak $t = 5, 10, 15, 20$ zamanlarında bir soliter dalganın hareketi $\Delta t = 0.1$ ve $\Delta x = 0.1, 0.05, 0.025$ adım uzunlukları için Şema-1 uygulanarak elde edilen sayısal sonuçların korunum sabitleri ve hata normları Çizelge 4.7’de ve $t = 20$ zamanında korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları Çizelge 4.8’de verildi. Çizelge



Şekil 4.2 : Şema-1 ile bir soliter dalgaının $t = 20$ zamanında mutlak hata grafiği : $c = 0.1$, $\Delta x = \Delta t = 0.1$

Çizelge 4.7 : Şema-1 ile bir soliter dalganın $c = 0.03$ için korunum sabitleri ve hata normları : $\Delta t = 0.1, \Delta x = 0.1, 0.05, 0.025$

Δx	t	I_1	I_2	I_3	L_2	L_∞
0.1	5	2.1094069302	0.1273016675	0.3888059903	$9.8580261622e-6$	$2.8446377005e-6$
	10	2.1094083774	0.1273016675	0.3888059903	$1.9700097335e-5$	$5.7670423492e-6$
	15	2.1094095043	0.1273016675	0.3888059901	$2.9509603501e-5$	$8.7359956499e-6$
	20	2.1094103333	0.1273016674	0.3888059900	$3.9272849567e-5$	$1.1717235113e-5$
0.05	5	2.1094070629	0.1273017058	0.3888059903	$5.0451536967e-6$	$1.4526591645e-6$
	10	2.1094088000	0.1273017058	0.3888059903	$1.0084422500e-5$	$2.9448504331e-6$
	15	2.1094103386	0.1273017058	0.3888059903	$1.5104492208e-5$	$4.4605212786e-6$
	20	2.1094116468	0.1273017058	0.3888059902	$2.0098288647e-5$	$5.9829097007e-6$
0.025	5	2.1094071347	0.1273017154	0.3888059904	$3.8451984683e-6$	$1.1046391740e-6$
	10	2.1094090405	0.1273017154	0.3888059903	$7.6894073240e-6$	$2.2392028843e-6$
	15	2.1094108398	0.1273017154	0.3888059903	$1.1517109954e-5$	$3.3917285205e-6$
	20	2.1094124800	0.1273017154	0.3888059903	$1.5322134993e-5$	$4.5493564872e-6$
Analitik Çözüm		2.1094074997	0.1273017186	0.3888059903		

Çizelge 4.8 : Şema-1 ile bir soliter dalganın $c = 0.03$ için korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta t = 0.1, \Delta x = 0.1, 0.05, 0.025$

Δx	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3
0.1	$2.8335907136e-6$	$5.1212617702e-8$	$3.9604514113e-10$
0.05	$4.1470360332e-6$	$1.2805563582e-8$	$1.0673706363e-10$
0.025	$4.9802063211e-6$	$3.2065342881e-9$	$6.0983940120e-11$

4.7 incelendiğinde zaman ilerledikçe hata normlarının biraz büyüdüğü, $\Delta x \rightarrow 0$ için $L_2 \rightarrow 0$, $L_\infty \rightarrow 0$ ve korunum sabitlerinin analitik değerleri ile uyumlu olduğu görüldü. Çizelge 4.8 incelendiğinde $\Delta x \rightarrow 0$ için kütle korunum sabitinin önemsenmeyecek kadar küçük bir şekilde büyüdüğü, momentum ve enerji korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarlarının küçüldüğü ve sonuçta önerilen şemanın korunum sabitlerini iyi bir şekilde koruduğu görüldü.

Daha sonra $t = 5, 10, 15, 20$ zamanlarında bir soliter dalganın hareketi $\Delta x = 0.1$ ve $\Delta t = 0.1, 0.05, 0.025$ adım uzunlukları için Şema-1 ile elde edilen sayısal sonuçların korunum sabitleri ve hata normları Çizelge 4.9'da ve $t = 20$ zamanında korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları Çizelge 4.10'da verildi. Çizelge 4.9 incelendiğinde zaman ilerledikçe hata normlarının büyüdüğü, $\Delta t \rightarrow 0$ için $L_2 \rightarrow 0$, $L_\infty \rightarrow 0$ ve korunum sabitlerinin analitik değerleri ile uyumlu olduğu görüldü. Çizelge 4.10'dan $t = 20$ zamanında kütle ve momentum korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarlarının hemen hemen aynı kaldığı, enerji korunum sabitinin mutlak değişim miktarının küçüldüğü ve sonuç olarak korunum sabitlerinin iyi bir şekilde korunduğu görüldü.

Daha sonra $t = 5, 10, 15, 20$ zamanlarında bir soliter dalganın hareketi $\Delta x = \Delta t = 0.1, 0.05, 0.025$ adım uzunlukları için Şema-1 ile elde edilen sayısal sonuçların korunum sabitleri ve hata normları Çizelge 4.11'de ve $t = 20$ zamanında korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları Çizelge 4.12'de verildi. Çizelge 4.11'den zaman ilerledikçe korunum hata normlarının

Çizelge 4.9 : Şema-1 ile bir soliter dalğanın $c = 0.03$ için korunum sabitleri ve hata normları : $\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.1, 0.05, 0.025$

Δt	t	I_1	I_2	I_3	L_2	L_∞
0.1	5	2.1094069302	0.1273016675	0.3888059903	$9.8580261622e-6$	$2.8446377005e-6$
	10	2.1094083774	0.1273016675	0.3888059903	$1.9700097335e-5$	$5.7670423492e-6$
	15	2.1094095043	0.1273016675	0.3888059901	$2.9509603501e-5$	$8.7359956499e-6$
	20	2.1094103333	0.1273016674	0.3888059900	$3.9272849567e-5$	$1.1717235113e-5$
0.05	5	2.1094069302	0.1273016675	0.3888059903	$7.2857881440e-6$	$2.1034986198e-6$
	10	2.1094083774	0.1273016675	0.3888059903	$1.4559719275e-5$	$4.2647356072e-6$
	15	2.1094095043	0.1273016675	0.3888059902	$2.1808605459e-5$	$6.4600797399e-6$
	20	2.1094103333	0.1273016675	0.3888059902	$2.9022398651e-5$	$8.6645320020e-6$
0.025	5	2.1094069302	0.1273016675	0.3888059903	$6.6427958593e-6$	$1.9181966500e-6$
	10	2.1094083774	0.1273016675	0.3888059903	$1.3274759307e-5$	$3.8891261966e-6$
	15	2.1094095043	0.1273016675	0.3888059903	$1.9883498764e-5$	$5.8910544434e-6$
	20	2.1094103333	0.1273016675	0.3888059902	$2.6459886679e-5$	$7.9012909635e-6$
Analitik Çözüm		2.1094074997	0.1273017186	0.3888059903		

Çizelge 4.10 : Şema-1 ile bir soliter dalğanın $c = 0.03$ için korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.1, 0.05, 0.025$

Δt	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3
0.1	$2.8335907136e-6$	$5.1212617702e-8$	$3.9604514113e-10$
0.05	$2.8335932289e-6$	$5.1167564297e-8$	$2.0338680740e-10$
0.025	$2.8335938600e-6$	$5.1158712600e-8$	$1.6495182997e-10$

küçük bir miktar arttığı, $\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$ için $L_2 \rightarrow 0, L_\infty \rightarrow 0$ olduğu ve korunum sabitlerinin analitik değerleri ile uyumlu olduğu görüldü. Çizelge 4.12'den kütle korunum sabitinin mutlak değişim miktarının hemen hemen aynı kaldığı, momentum ve enerji korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarlarının küçüldüğü ve sonuç olarak korunum sabitlerinin iyi bir şekilde korunduğu görüldü.

Son olarak bir soliter dalğanın hareketi $\Delta x = 0.4, 0.2, 0.1, 0.05$ ve $\Delta t = 0.2, 0.1, 0.05$ adım uzunlukları için Şema-1 ile elde edilen sayısal sonuçların $t = 20$ zamanında korunum sabitleri ve hata normları hesaplanarak Çizelge 4.13'te verildi. Çizelge 4.13'ten $\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$ için $L_2 \rightarrow 0, L_\infty \rightarrow 0$ olduğu ve korunum sabitlerinin analitik değerleri ile uyumlu olduğu görüldü.

Bir soliter dalğanın hareketi $t = 5, 10, 15, 20$ zamanlarında $\Delta t = 0.1$ ve $\Delta x = 0.1$ adım uzunlukları için Şema-1 ile elde edilen sayısal ve analitik çözümlerinin grafikleri Şekil 4.3'te ve $t = 20$ zamanında mutlak hatanın grafiği Şekil 4.4'te verildi. Şekil 4.3'ten sayısal çözüm ile analitik çözümün grafiklerinin çakıştığı ve $t = 0$ zamanında $x = 0$ konumunda dalğanın genliği $3c = 0.09$ iken $t = 5, 10, 15, 20$ zamanlarında dalğanın genliği sırasıyla $x = 5.2, 10.4, 15.5, 20.7$ konumlarında $3c = 0.0899983005, 0.0899995916, 0.0899976159, 0.0899985329$ olarak elde edildi. Böylece $[0, 20]$ zaman aralığında dalğanın genliğinin başlangıç zamanındaki genliği ile uyumlu olduğu ve bir soliter dalğanın şeklini koruyarak sağa doğru $v = 1.035$ hızıyla hareket

Çizelge 4.11 : Şema-1 ile bir soliter dalganın $c = 0.03$ için korunum sabitleri ve hata normları : $\Delta x = \Delta t = 0.1, 0.05, 0.025$

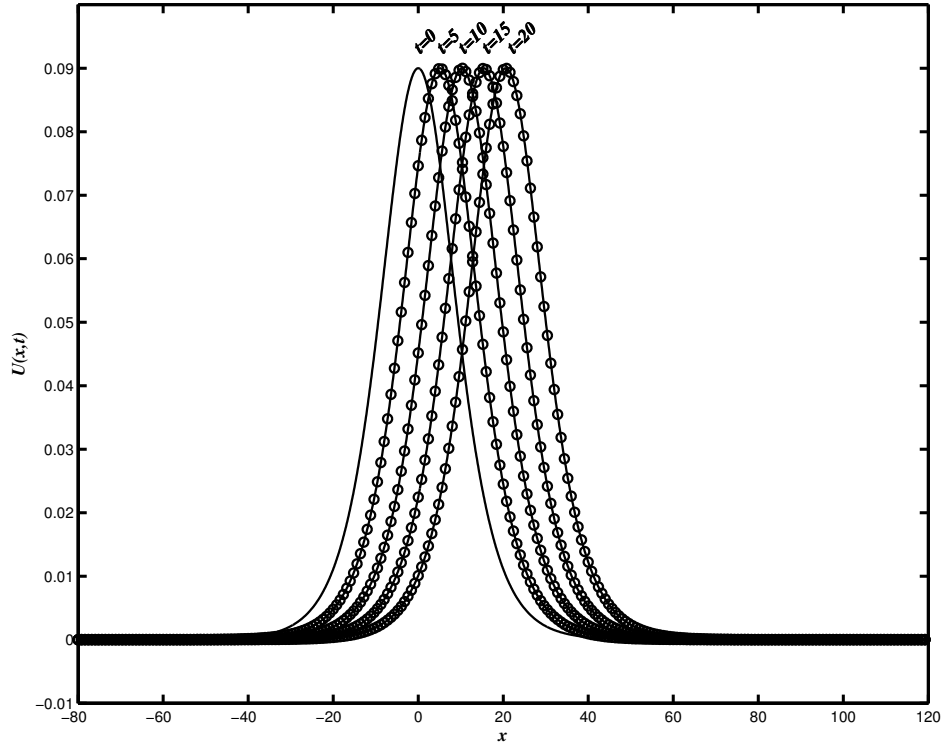
$\Delta x = \Delta t$	t	I_1	I_2	I_3	L_2	L_∞
0.1	5	2.1094069302	0.1273016675	0.3888059903	$9.8580261622e-6$	$2.8446377005e-6$
	10	2.1094083774	0.1273016675	0.3888059903	$1.9700097335e-5$	$5.7670423492e-6$
	15	2.1094095043	0.1273016675	0.3888059901	$2.9509603501e-5$	$8.7359956499e-6$
	20	2.1094103333	0.1273016674	0.3888059900	$3.9272849567e-5$	$1.1717235113e-5$
0.05	5	2.1094070629	0.1273017058	0.3888059904	$2.4788745735e-6$	$7.1125930502e-7$
	10	2.1094088000	0.1273017058	0.3888059904	$4.9581500677e-6$	$1.4419962071e-6$
	15	2.1094103386	0.1273017058	0.3888059903	$7.4225515697e-6$	$2.1842250071e-6$
	20	2.1094116468	0.1273017058	0.3888059903	$9.8684803179e-6$	$2.9295622931e-6$
0.025	5	2.1094071346	0.1273017154	0.3888059904	$6.8480047317e-7$	$2.2114304063e-7$
	10	2.1094090405	0.1273017154	0.3888059904	$1.3967714371e-6$	$3.6050644879e-7$
	15	2.1094108398	0.1273017154	0.3888059904	$2.0809278832e-6$	$5.4607192157e-7$
	20	2.1094124800	0.1273017154	0.3888059904	$2.7312817863e-6$	$7.3240635258e-7$
Analitik Çözüm		2.1094074997	0.1273017186	0.3888059903		

Çizelge 4.12 : Şema-1 ile bir soliter dalganın $c = 0.03$ için korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta x = \Delta t = 0.1, 0.05, 0.025$

$\Delta x = \Delta t$	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3
0.1	$2.8335907136e-6$	$5.1212617702e-8$	$3.9604514113e-10$
0.05	$4.1470414573e-6$	$1.2784617059e-8$	$1.9524770689e-11$
0.025	$4.9802152176e-6$	$3.1902633313e-9$	$5.4508064729e-12$

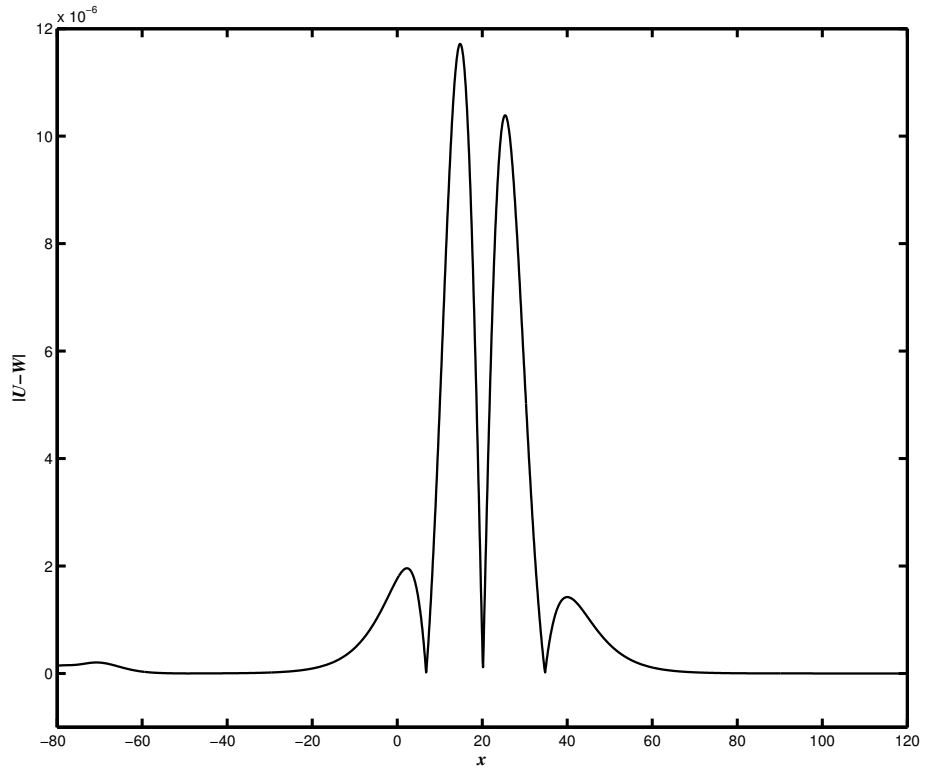
Çizelge 4.13 : Şema-1 ile bir soliter dalganın $c = 0.03$ için korunum sabitleri ve hata normları : $\Delta x = 0.4, 0.2, 0.1, 0.05$ ve $\Delta t = 0.2, 0.1, 0.05$

Δx	Δt	I_1	I_2	I_3	L_2	L_∞
0.4	0.2	2.1094070750	0.1273008902	0.3888059377	$4.6364938663e-4$	$1.3858599671e-4$
	0.1	2.1094070750	0.1273008925	0.3888059474	$4.2285792455e-4$	$1.2643326445e-4$
	0.05	2.1094070750	0.1273008930	0.3888059497	$4.1265642345e-4$	$1.2339398341e-4$
0.2	0.2	2.1094086466	0.1273015127	0.3888059840	$1.5698309239e-4$	$4.6852411337e-5$
	0.1	2.1094086466	0.1273015135	0.3888059871	$1.1602861566e-4$	$3.4656238779e-5$
	0.05	2.1094086466	0.1273015136	0.3888059877	$1.0578654331e-4$	$3.1606138728e-5$
0.1	0.2	2.1094103333	0.1273016671	0.3888059886	$8.0266569470e-5$	$2.3923862820e-5$
	0.1	2.1094103333	0.1273016674	0.3888059900	$3.9272849567e-5$	$1.1717235113e-5$
	0.05	2.1094103333	0.1273016675	0.3888059902	$2.9022398651e-5$	$8.6645320020e-6$
0.05	0.2	2.1094116468	0.1273017056	0.3888059893	$6.1089411558e-5$	$1.8192125383e-5$
	0.1	2.1094116468	0.1273017058	0.3888059902	$2.0098288647e-5$	$5.9829097007e-6$
	0.05	2.1094116468	0.1273017058	0.3888059903	$9.8684803179e-6$	$2.9295622931e-6$
Analitik Çözüm		2.1094074997	0.1273017186	0.3888059903		



Şekil 4.3 : Şema-1 ile bir soliter dalğanın çeşitli zamanlarda yaklaşık ($\circ$) ve analitik çözümleri ($-$) : $c = 0.03$, $\Delta x = \Delta t = 0.1$

ettiği görüldü. Şekil 4.4'ten Şema-1'in mutlak hatasının en büyük değerinin konum aralığının ortalarında ve Çizelge 4.1 ile uyumlu olduğu görüldü.



Şekil 4.4 : Şema-1 ile bir soliter dalğanın $t = 20$ zamanında mutlak hata grafiği : $c = 0.03$, $\Delta x = \Delta t = 0.1$

Çizelge 4.14 : Şema-1 ile iki soliter dalğanın korunum sabitleri: $\Delta x = 0.1$, $\Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$

$\Delta t = 0.1$				$\Delta t = 0.01$		
t	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
2	37.9168916124	120.5033248451	744.0745761574	37.9168916021	120.5039150210	744.0803087636
4	37.9170669552	120.5019988074	744.0608491875	37.9170669219	120.5037384244	744.0781834400
6	37.9172618557	120.4984078134	744.0225803940	37.9172619039	120.5031287876	744.0707950404
8	37.9174569614	120.4845824369	743.8721644246	37.9174569739	120.5008972525	744.0414634017
10	37.9176352358	120.4355083848	743.3254536972	37.9176351856	120.4938516109	743.9366782532
12	37.9177898804	120.3182176322	741.9853361586	37.9177899013	120.4792678472	743.6875215567
14	37.9179237382	120.2369370357	741.0431059317	37.9179237916	120.4708337003	743.5302917722
16	37.9180436285	120.3364973027	742.1992657821	37.9180435772	120.4827469855	743.7504536728
18	37.9181546960	120.4436043316	743.4196616380	37.9181545979	120.4957735191	743.9665701098
20	37.9182583061	120.4861698661	743.8915399779	37.9182583494	120.5014374693	744.0488107038
22	37.9183532746	120.4984746483	744.0245454956	37.9183534410	120.5032105610	744.0719591803
24	37.9184381907	120.5016851117	744.0585582477	37.9184382160	120.5036995342	744.0779021405
26	37.9185130003	120.5025084889	744.0670920089	37.9185127639	120.5038319309	744.0794274823
28	37.9185792003	120.5027336225	744.0693225957	37.9185789716	120.5038722430	744.0798623919
30	37.9186310292	120.5028093411	744.0700008050	37.9186294834	120.5038888754	744.0800250105
$\Delta t = 0.001$				$\Delta t = 0.0001$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
2	37.9168916020	120.5039188090	744.0803472579	37.9168916020	120.5039188468	744.0803476418
4	37.9170669216	120.5037511924	744.0783155218	37.9170669216	120.5037513196	744.0783168387
6	37.9172619044	120.5031719717	744.0712424907	37.9172619044	120.5031724033	744.0712469626
8	37.9174569740	120.5010619625	744.0431790715	37.9174569741	120.5010636098	744.0431962314
10	37.9176351851	120.4944558361	743.9430178154	37.9176351851	120.4944618805	743.9430812344
12	37.9177899015	120.4809329359	743.7051348292	37.9177899015	120.4809495923	743.7053110222
14	37.9179237921	120.4731805387	743.5552577922	37.9179237922	120.4732040076	743.5555074598
16	37.9180435767	120.4841525246	743.7653665913	37.9180435767	120.4841665741	743.7655156590
18	37.9181545969	120.4962564512	743.9716393593	37.9181545969	120.4962612765	743.9716900110
20	37.9182583499	120.5015724979	744.0502081474	37.9182583498	120.5015738462	744.0502221025
22	37.9183534427	120.5032485012	744.0723441376	37.9183534427	120.5032488793	744.0723479751
24	37.9184382163	120.5037127752	744.0780324067	37.9184382162	120.5037129066	744.0780337002
26	37.9185127615	120.5038389730	744.0794949413	37.9185127615	120.5038390424	744.0794956073
28	37.9185789693	120.5038776342	744.0799138830	37.9185789693	120.5038776872	744.0799143898
30	37.9186294661	120.5038937335	744.0800719008	37.9186294659	120.5038937812	744.0800723624
Analitik Çözüm : $I_1 = 37.9166666667$, $I_2 = 120.5232340954$, $I_3 = 744.0812089579$						

4.2.2 İki soliter dalğanın hareketi

Burada $k_1 = 0.4$, $k_2 = 0.3$, $x_1 = 15$, $x_2 = 35$ için $[0, 120]$ konum aralığında iki soliter dalğanın hareketi Şema-1 ile $t = 30$ zamanına kadar uygulanarak elde edilen sayısal sonuçların korunum sabitleri ve korunum sabitlerinin değişim miktarları hesaplanarak çizelgeler halinde verildi. Teorik olarak dalgaların başlangıç anındaki genlikleri $3c_1 = 5.3333$ ve $3c_2 = 1.6875$ olup hızları $v_1 = 2.7778$ ve $v_2 = 1.5625$ 'tir.

İlk olarak iki soliter dalğanın hareketi $t = 2, 4, \dots, 30$ zamanlarında $\Delta x = 0.1$ ve $\Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$ adım uzunlukları için Şema-1 ile elde edilen sayısal sonuçların korunum sabitleri Çizelge 4.14'te, korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları Çizelge 4.15'te verildi. Çizelge 4.14 ve Çizelge 4.15'ten korunum sabitlerinin analitik değerleri ile uyumlu olduğu fakat dalgaların birbiri ile etkileşmeye başladığı zamandan ayrıldıkları zamana kadar korunum sabitlerinin bir miktar bozulduğu görüldü.

Çizelge 4.15 : Şema-1 ile iki soliter dalganın korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta x = 0.1$, $\Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$

t	$\Delta t = 0.1$			$\Delta t = 0.01$		
	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3
2	$2.249457e-4$	$1.990925e-2$	$6.632801e-3$	$2.249354e-4$	$1.931907e-2$	$9.001942e-4$
4	$4.002885e-4$	$2.123529e-2$	$2.035977e-2$	$4.002553e-4$	$1.949567e-2$	$3.025518e-3$
6	$5.951890e-4$	$2.482628e-2$	$5.862856e-2$	$5.952372e-4$	$2.010531e-2$	$1.041392e-2$
8	$7.902947e-4$	$3.865166e-2$	$2.090445e-1$	$7.903073e-4$	$2.233684e-2$	$3.974556e-2$
10	$9.685691e-4$	$8.772571e-2$	$7.557553e-1$	$9.685189e-4$	$2.938248e-2$	$1.445307e-1$
12	$1.123214e-3$	$2.050165e-1$	$2.095873e+0$	$1.123235e-3$	$4.396625e-2$	$3.936874e-1$
14	$1.257072e-3$	$2.862971e-1$	$3.038103e+0$	$1.257125e-3$	$5.240040e-2$	$5.509172e-1$
16	$1.376962e-3$	$1.867368e-1$	$1.881943e+0$	$1.376911e-3$	$4.048711e-2$	$3.307553e-1$
18	$1.488029e-3$	$7.962976e-2$	$6.615473e-1$	$1.487931e-3$	$2.746058e-2$	$1.146388e-1$
20	$1.591639e-3$	$3.706423e-2$	$1.896690e-1$	$1.591683e-3$	$2.179663e-2$	$3.239825e-2$
22	$1.686608e-3$	$2.475945e-2$	$5.666346e-2$	$1.686774e-3$	$2.002353e-2$	$9.249778e-3$
24	$1.771524e-3$	$2.154898e-2$	$2.265071e-2$	$1.771549e-3$	$1.953456e-2$	$3.306817e-3$
26	$1.846334e-3$	$2.072561e-2$	$1.411695e-2$	$1.846097e-3$	$1.940216e-2$	$1.781476e-3$
28	$1.912534e-3$	$2.050047e-2$	$1.188636e-2$	$1.912305e-3$	$1.936185e-2$	$1.346566e-3$
30	$1.964363e-3$	$2.042475e-2$	$1.120815e-2$	$1.962817e-3$	$1.934522e-2$	$1.183947e-3$
t	$\Delta t = 0.001$			$\Delta t = 0.0001$		
	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3
2	$2.249353e-4$	$1.931529e-2$	$8.617000e-4$	$2.249353e-4$	$1.931525e-2$	$8.613160e-4$
4	$4.002549e-4$	$1.948290e-2$	$2.893436e-3$	$4.002549e-4$	$1.948278e-2$	$2.892119e-3$
6	$5.952377e-4$	$2.006212e-2$	$9.966467e-3$	$5.952377e-4$	$2.006169e-2$	$9.961995e-3$
8	$7.903074e-4$	$2.217213e-2$	$3.802989e-2$	$7.903074e-4$	$2.217049e-2$	$3.801273e-2$
10	$9.685184e-4$	$2.877826e-2$	$1.381911e-1$	$9.685184e-4$	$2.877221e-2$	$1.381277e-1$
12	$1.123235e-3$	$4.230116e-2$	$3.760741e-1$	$1.123235e-3$	$4.228450e-2$	$3.758979e-1$
14	$1.257125e-3$	$5.005356e-2$	$5.259512e-1$	$1.257125e-3$	$5.003009e-2$	$5.257015e-1$
16	$1.376910e-3$	$3.908157e-2$	$3.158424e-1$	$1.376910e-3$	$3.906752e-2$	$3.156933e-1$
18	$1.487930e-3$	$2.697764e-2$	$1.095696e-1$	$1.487930e-3$	$2.697282e-2$	$1.095189e-1$
20	$1.591683e-3$	$2.166160e-2$	$3.100081e-2$	$1.591683e-3$	$2.166025e-2$	$3.098686e-2$
22	$1.686776e-3$	$1.998559e-2$	$8.864820e-3$	$1.686776e-3$	$1.998522e-2$	$8.860983e-3$
24	$1.771550e-3$	$1.952132e-2$	$3.176551e-3$	$1.771550e-3$	$1.952119e-2$	$3.175258e-3$
26	$1.846095e-3$	$1.939512e-2$	$1.714017e-3$	$1.846095e-3$	$1.939505e-2$	$1.713351e-3$
28	$1.912303e-3$	$1.935646e-2$	$1.295075e-3$	$1.912303e-3$	$1.935641e-2$	$1.294568e-3$
30	$1.962799e-3$	$1.934036e-2$	$1.137057e-3$	$1.962799e-3$	$1.934031e-2$	$1.136595e-3$

Çizelge 4.16 : Şema-1 ile iki soliter dalgaın korunum sabitleri : $\Delta x = 0.05$, $\Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$

$\Delta t = 0.1$				$\Delta t = 0.01$		
t	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
2	37.9169039900	120.5179639734	744.0768429101	37.9169039790	120.5184037696	744.0810582488
4	37.9170962654	120.5168858571	744.0660004668	37.9170962323	120.5183577680	744.0805281854
6	37.9173168176	120.5137104790	744.0328279654	37.9173168661	120.5181818687	744.0784339938
8	37.9175460858	120.5012997138	743.9015146294	37.9175460993	120.5175270151	744.0700634712
10	37.9177659866	120.4568417405	743.4251606922	37.9177659387	120.5154259007	744.0402596861
12	37.9179682811	120.3490024480	742.2534642208	37.9179683036	120.5109633242	743.9691773639
14	37.9181544021	120.2740744716	741.4330510141	37.9181544554	120.5083548058	743.9245691661
16	37.9183301465	120.3667869448	742.4507315214	37.9183300961	120.5120769615	743.9877557975
18	37.9185000250	120.4647761323	743.5138231992	37.9184999302	120.5160296244	744.0491620417
20	37.9186648868	120.5030078824	743.9216033198	37.9186649322	120.5176998427	744.0723538544
22	37.9188229536	120.5138855214	744.0358049777	37.9188231178	120.5182120230	744.0788433621
24	37.9189721879	120.5166889301	744.0648459098	37.9189722108	120.5183513365	744.0805011254
26	37.9191120183	120.5173997538	744.0720771049	37.9191117864	120.5183886309	744.0809239621
28	37.9192435609	120.5175906682	744.0739350412	37.9192433419	120.5183998181	744.0810431106
30	37.9193605738	120.5176527089	744.0744773316	37.9193589910	120.5184043410	744.0810867947
$\Delta t = 0.001$				$\Delta t = 0.0001$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
2	37.9169039789	120.5184060055	744.0810811502	37.9169039790	120.5184060280	744.0810813802
4	37.9170962319	120.5183677929	744.0806316319	37.9170962320	120.5183678932	744.0806326661
6	37.9173168666	120.5182225136	744.0788550259	37.9173168666	120.5182229198	744.0788592347
8	37.9175460994	120.5176908617	744.0717719371	37.9175460994	120.5176925004	744.0717890247
10	37.9177659383	120.5160327291	744.0466406358	37.9177659383	120.5160387998	744.0467044709
12	37.9179683038	120.5126379420	743.9869311884	37.9179683039	120.5126546940	743.9871087899
14	37.9181544559	120.5107049772	743.9495714381	37.9181544560	120.5107284797	743.9498214701
16	37.9183300956	120.5134723483	744.0025208450	37.9183300957	120.5134862967	744.0026684375
18	37.9184999293	120.5165033348	744.0541155027	37.9184999294	120.5165080685	744.0541650014
20	37.9186649327	120.5178291160	744.0736864445	37.9186649329	120.5178304078	744.0736997606
22	37.9188231195	120.5182458381	744.0791844255	37.9188231197	120.5182461763	744.0791878351
24	37.9189722111	120.5183610047	744.0805940949	37.9189722113	120.5183611018	744.0805950276
26	37.9191117841	120.5183922658	744.0809560226	37.9191117843	120.5183923028	744.0809563484
28	37.9192433397	120.5184018502	744.0810597391	37.9192433399	120.5184018713	744.0810599116
30	37.9193589733	120.5184058546	744.0810989816	37.9193589733	120.5184058707	744.0810991110
Analitik Çözüm : $I_1 = 37.9166666667$, $I_2 = 120.5232340954$, $I_3 = 744.0812089579$						

Daha sonra iki soliter dalgaın hareketi $t = 2, 4, \dots, 30$ zamanlarında $\Delta x = 0.05$ ve $\Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$ adım uzunlukları için Şema-1 ile elde edilen sayısal sonuçların korunum sabitleri Çizelge 4.16’da, korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları Çizelge 4.17’de verildi. Çizelge 4.16 ve Çizelge 4.17’den korunum sabitlerinin analitik değerleri ile uyumlu olduğu fakat dalgaların birbiri ile etkileşmeye başladığı zamandan ayrıldıkları zamana kadar korunum sabitlerinin bir miktar bozulduğu görüldü.

Daha sonra iki soliter dalgaın hareketi $t = 2, 4, \dots, 30$ zamanlarında $\Delta x = 0.025$ ve $\Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$ adım uzunlukları için Şema-1 ile elde edilen sayısal sonuçların korunum sabitleri Çizelge 4.18’de, korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları Çizelge 4.19’da verildi. Çizelge 4.18 ve Çizelge 4.19’dan zaman adım uzunluğu küçüldükçe korunum sabitlerinin analitik değerleri ile uyumlu olduğu görüldü.

Sonuç olarak Çizelge 4.14 - Çizelge 4.19’dan zaman ve konum adım uzunlukları küçüldükçe korunum sabitlerinin analitik değerler ile oldukça uyumlu olduğu görüldü.

Çizelge 4.17 : Şema-1 ile iki soliter dalgaının korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta x = 0.05$, $\Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$

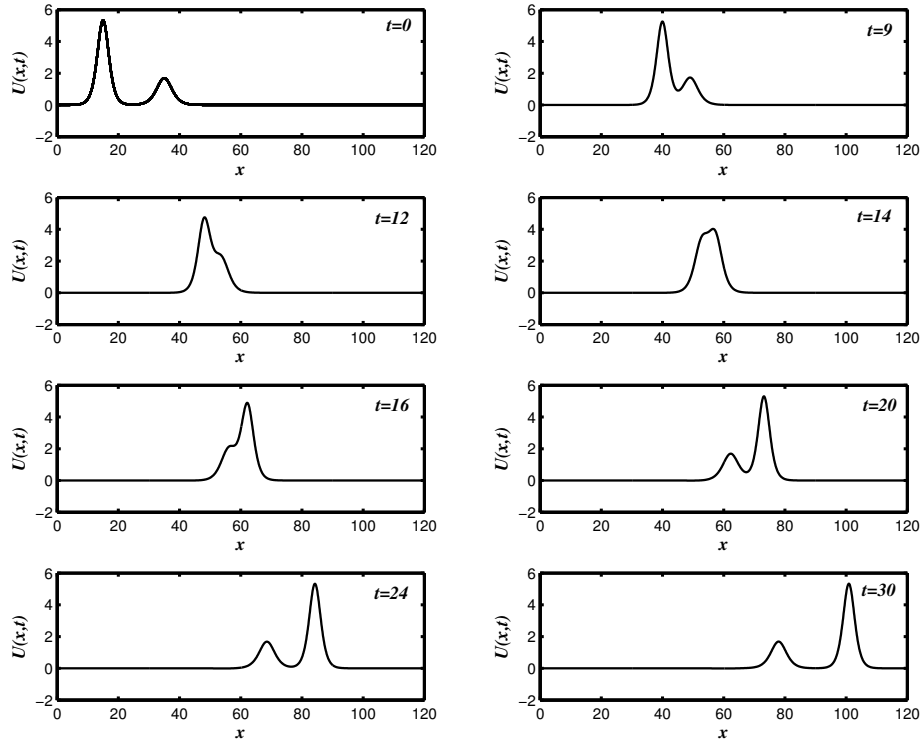
t	$\Delta t = 0.1$			$\Delta t = 0.01$		
	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3
2	$2.373233e-4$	$5.270122e-3$	$4.366048e-3$	$2.373124e-4$	$4.830326e-3$	$1.507091e-4$
4	$4.295987e-4$	$6.348238e-3$	$1.520849e-2$	$4.295656e-4$	$4.876327e-3$	$6.807725e-4$
6	$6.501510e-4$	$9.523616e-3$	$4.838099e-2$	$6.501994e-4$	$5.052227e-3$	$2.774964e-3$
8	$8.794192e-4$	$2.193438e-2$	$1.796943e-1$	$8.794326e-4$	$5.707080e-3$	$1.114549e-2$
10	$1.099320e-3$	$6.639235e-2$	$6.560483e-1$	$1.099272e-3$	$7.808195e-3$	$4.094927e-2$
12	$1.301614e-3$	$1.742316e-1$	$1.827745e+0$	$1.301637e-3$	$1.227077e-2$	$1.120316e-1$
14	$1.487735e-3$	$2.491596e-1$	$2.648158e+0$	$1.487789e-3$	$1.487929e-2$	$1.566398e-1$
16	$1.663480e-3$	$1.564472e-1$	$1.630477e+0$	$1.663429e-3$	$1.115713e-2$	$9.345316e-2$
18	$1.833358e-3$	$5.845796e-2$	$5.673858e-1$	$1.833264e-3$	$7.204471e-3$	$3.204692e-2$
20	$1.998220e-3$	$2.022621e-2$	$1.596056e-1$	$1.998266e-3$	$5.534253e-3$	$8.855103e-3$
22	$2.156287e-3$	$9.348574e-3$	$4.540398e-2$	$2.156451e-3$	$5.022072e-3$	$2.365596e-3$
24	$2.305521e-3$	$6.545165e-3$	$1.636305e-2$	$2.305544e-3$	$4.882759e-3$	$7.078325e-4$
26	$2.445352e-3$	$5.834342e-3$	$9.131853e-3$	$2.445120e-3$	$4.845464e-3$	$2.849958e-4$
28	$2.576894e-3$	$5.643427e-3$	$7.273917e-3$	$2.576675e-3$	$4.834277e-3$	$1.658472e-4$
30	$2.693907e-3$	$5.581386e-3$	$6.731626e-3$	$2.692324e-3$	$4.829754e-3$	$1.221632e-4$
t	$\Delta t = 0.001$			$\Delta t = 0.0001$		
	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3
2	$2.373122e-4$	$4.828090e-3$	$1.278077e-4$	$2.373123e-4$	$4.828067e-3$	$1.275777e-4$
4	$4.295653e-4$	$4.866302e-3$	$5.773260e-4$	$4.295653e-4$	$4.866202e-3$	$5.762918e-4$
6	$6.501999e-4$	$5.011582e-3$	$2.353932e-3$	$6.501999e-4$	$5.011176e-3$	$2.349723e-3$
8	$8.794327e-4$	$5.543234e-3$	$9.437021e-3$	$8.794328e-4$	$5.541595e-3$	$9.419933e-3$
10	$1.099272e-3$	$7.201366e-3$	$3.456832e-2$	$1.099272e-3$	$7.195296e-3$	$3.450449e-2$
12	$1.301637e-3$	$1.059615e-2$	$9.427777e-2$	$1.301637e-3$	$1.057940e-2$	$9.410017e-2$
14	$1.487789e-3$	$1.252912e-2$	$1.316375e-1$	$1.487789e-3$	$1.250562e-2$	$1.313875e-1$
16	$1.663429e-3$	$9.761747e-3$	$7.868811e-2$	$1.663429e-3$	$9.747799e-3$	$7.854052e-2$
18	$1.833263e-3$	$6.730761e-3$	$2.709346e-2$	$1.833263e-3$	$6.726027e-3$	$2.704396e-2$
20	$1.998266e-3$	$5.404979e-3$	$7.522513e-3$	$1.998266e-3$	$5.403688e-3$	$7.509198e-3$
22	$2.156453e-3$	$4.988257e-3$	$2.024532e-3$	$2.156453e-3$	$4.987919e-3$	$2.021123e-3$
24	$2.305544e-3$	$4.873091e-3$	$6.148629e-4$	$2.305545e-3$	$4.872994e-3$	$6.139303e-4$
26	$2.445117e-3$	$4.841830e-3$	$2.529353e-4$	$2.445118e-3$	$4.841793e-3$	$2.526095e-4$
28	$2.576673e-3$	$4.832245e-3$	$1.492188e-4$	$2.576673e-3$	$4.832224e-3$	$1.490462e-4$
30	$2.692307e-3$	$4.828241e-3$	$1.099762e-4$	$2.692307e-3$	$4.828225e-3$	$1.098469e-4$

Çizelge 4.18 : Şema-1 ile iki soliter dalgaının korunum sabitleri : $\Delta x = 0.025$, $\Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$

$\Delta t = 0.1$						$\Delta t = 0.01$		
t	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3		
2	37.9169104890	120.5216237804	744.0773310756	37.9169104777	120.5220257113	744.0811636366		
4	37.9171119648	120.5206042590	744.0671557549	37.9171119315	120.5220088524	744.0809771460		
6	37.9173468397	120.5175329312	744.0352617591	37.9173468881	120.5219416187	744.0802121166		
8	37.9175957739	120.5054786361	743.9087757094	37.9175957876	120.5216839493	744.0771357520		
10	37.9178404273	120.4621773666	743.4500570394	37.9178403802	120.5208220004	744.0661292901		
12	37.9180720445	120.3567059592	742.3205978792	37.9180720676	120.5188953006	744.0397082489		
14	37.9182915138	120.2833586618	741.5305232097	37.9182915672	120.5177336282	744.0231021460		
16	37.9185042293	120.3743436248	742.5132646685	37.9185041792	120.5193919751	744.0467223849		
18	37.9187144506	120.4700539140	743.5370536950	37.9187143567	120.5210780088	744.0694956391		
20	37.9189228222	120.5072074185	743.9288988727	37.9189228684	120.5217552609	744.0780176624		
22	37.9191273172	120.5177311638	744.0384418373	37.9191274812	120.5219550287	744.0803832544		
24	37.9193256030	120.5204338992	744.0662542127	37.9193256257	120.5220079479	744.0809831494		
26	37.9195168200	120.5211169330	744.0731641147	37.9195165896	120.5220217837	744.0811343127		
28	37.9197018388	120.5212993949	744.0749301335	37.9197016226	120.5220257807	744.0811756302		
30	37.9198741707	120.5213580460	744.0754388052	37.9198725789	120.5220273025	744.0811898991		
$\Delta t = 0.001$						$\Delta t = 0.0001$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3		
2	37.9169104775	120.5220275561	744.0811826025	37.9169104775	120.5220275743	744.0811827893		
4	37.9171119312	120.5220181874	744.0810733845	37.9171119312	120.5220182805	744.0810743436		
6	37.9173468885	120.5219816252	744.0806265060	37.9173468884	120.5219820242	744.0806306409		
8	37.9175957877	120.5218475784	744.0788423994	37.9175957876	120.5218492147	744.0788594676		
10	37.9178403797	120.5214294817	744.0725206325	37.9178403796	120.5214355586	744.0725845690		
12	37.9180720678	120.5205723084	744.0574973637	37.9180720678	120.5205890842	744.0576753171		
14	37.9182915677	120.5200846180	744.0481132317	37.9182915677	120.5201081286	744.0483633501		
16	37.9185041787	120.5207848056	744.0614502054	37.9185041787	120.5207987284	744.0615974244		
18	37.9187143558	120.5215494089	744.0744201083	37.9187143558	120.5215541196	744.0744693181		
20	37.9189228689	120.5218830929	744.0793340194	37.9189228689	120.5218843700	744.0793471705		
22	37.9191274829	120.5219878092	744.0807133092	37.9191274829	120.5219881365	744.0807166049		
24	37.9193256259	120.5220167188	744.0810667494	37.9193256259	120.5220168061	744.0810675812		
26	37.9195165873	120.5220245624	744.0811574743	37.9195165873	120.5220245895	744.0811576998		
28	37.9197016204	120.5220269685	744.0811834928	37.9197016204	120.5220269791	744.0811835595		
30	37.9198725611	120.5220279755	744.0811933598	37.9198725608	120.5220279807	744.0811933813		
Analitik Çözüm : $I_1 = 37.9166666667$, $I_2 = 120.5232340954$, $I_3 = 744.0812089579$								

Çizelge 4.19 : Şema-1 ile iki soliter dalğanın korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta x = 0.025, \Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$

t	$\Delta t = 0.1$			$\Delta t = 0.01$		
	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3
2	$2.438223e-4$	$1.610315e-3$	$3.877882e-3$	$2.438110e-4$	$1.208384e-3$	$4.532127e-5$
4	$4.452981e-4$	$2.629836e-3$	$1.405320e-2$	$4.452649e-4$	$1.225243e-3$	$2.318119e-4$
6	$6.801730e-4$	$5.701164e-3$	$4.594720e-2$	$6.802214e-4$	$1.292477e-3$	$9.968412e-4$
8	$9.291072e-4$	$1.775546e-2$	$1.724332e-1$	$9.291209e-4$	$1.550146e-3$	$4.073206e-3$
10	$1.173761e-3$	$6.105673e-2$	$6.311519e-1$	$1.173714e-3$	$2.412095e-3$	$1.507967e-2$
12	$1.405378e-3$	$1.665281e-1$	$1.760611e+0$	$1.405401e-3$	$4.338795e-3$	$4.150071e-2$
14	$1.624847e-3$	$2.398754e-1$	$2.550686e+0$	$1.624900e-3$	$5.500467e-3$	$5.810681e-2$
16	$1.837563e-3$	$1.488905e-1$	$1.567944e+0$	$1.837513e-3$	$3.842120e-3$	$3.448657e-2$
18	$2.047784e-3$	$5.318018e-2$	$5.441553e-1$	$2.047690e-3$	$2.156087e-3$	$1.171332e-2$
20	$2.256156e-3$	$1.602668e-2$	$1.523101e-1$	$2.256202e-3$	$1.478835e-3$	$3.191295e-3$
22	$2.460651e-3$	$5.502932e-3$	$4.276712e-2$	$2.460815e-3$	$1.279067e-3$	$8.257035e-4$
24	$2.658936e-3$	$2.800196e-3$	$1.495475e-2$	$2.658959e-3$	$1.226147e-3$	$2.258085e-4$
26	$2.850153e-3$	$2.117162e-3$	$8.044843e-3$	$2.849923e-3$	$1.212312e-3$	$7.464518e-5$
28	$3.035172e-3$	$1.934700e-3$	$6.278824e-3$	$3.034956e-3$	$1.208315e-3$	$3.332765e-5$
30	$3.207504e-3$	$1.876049e-3$	$5.770153e-3$	$3.205912e-3$	$1.206793e-3$	$1.905879e-5$
t	$\Delta t = 0.001$			$\Delta t = 0.0001$		
	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3
2	$2.438109e-4$	$1.206539e-3$	$2.635538e-5$	$2.438109e-4$	$1.206521e-3$	$2.616857e-5$
4	$4.452645e-4$	$1.215908e-3$	$1.355734e-4$	$4.452645e-4$	$1.215815e-3$	$1.346142e-4$
6	$6.802219e-4$	$1.252470e-3$	$5.824519e-4$	$6.802218e-4$	$1.252071e-3$	$5.783170e-4$
8	$9.291210e-4$	$1.386517e-3$	$2.366558e-3$	$9.291209e-4$	$1.384881e-3$	$2.349490e-3$
10	$1.173713e-3$	$1.804614e-3$	$8.688325e-3$	$1.173713e-3$	$1.798537e-3$	$8.624389e-3$
12	$1.405401e-3$	$2.661787e-3$	$2.371159e-2$	$1.405401e-3$	$2.645011e-3$	$2.353364e-2$
14	$1.624901e-3$	$3.149477e-3$	$3.309573e-2$	$1.624901e-3$	$3.125967e-3$	$3.284561e-2$
16	$1.837512e-3$	$2.449290e-3$	$1.975875e-2$	$1.837512e-3$	$2.435367e-3$	$1.961153e-2$
18	$2.047689e-3$	$1.684686e-3$	$6.788850e-3$	$2.047689e-3$	$1.679976e-3$	$6.739640e-3$
20	$2.256202e-3$	$1.351003e-3$	$1.874938e-3$	$2.256202e-3$	$1.349725e-3$	$1.861787e-3$
22	$2.460816e-3$	$1.246286e-3$	$4.956487e-4$	$2.460816e-3$	$1.245959e-3$	$4.923530e-4$
24	$2.658959e-3$	$1.217377e-3$	$1.422085e-4$	$2.658959e-3$	$1.217289e-3$	$1.413766e-4$
26	$2.849921e-3$	$1.209533e-3$	$5.148358e-5$	$2.849921e-3$	$1.209506e-3$	$5.125804e-5$
28	$3.034954e-3$	$1.207127e-3$	$2.546511e-5$	$3.034954e-3$	$1.207116e-3$	$2.539834e-5$
30	$3.205894e-3$	$1.206120e-3$	$1.559809e-5$	$3.205894e-3$	$1.206115e-3$	$1.557657e-5$



Şekil 4.5 : Şema-1 ile iki soliter dalganın çeşitli zamanlarda yaklaşık çözümleri : $\Delta x = 0.1$, $\Delta t = 0.01$

$\Delta x = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ adım uzunlukları için iki soliter dalganın Şema-1 ile sayısal çözümünün $[0, 30]$ zaman aralığındaki hareketi Şekil 4.5'te verildi. Şekil 4.5'ten $t = 9$ zamanında büyük genlikli dalganın küçük genlikli dalgaya yetiştiği ve dalgaların birbirleri ile etkileşmeye başladığı görülmektedir. $t = 14$ zamanında dalgalar tek bir dalga gibi görülmektedir. $t = 16$ zamanında büyük genlikli dalganın küçük genlikli dalgadan ayrılarak öne geçmeye başladığı, $t = 20$ zamanında büyük genlikli dalganın küçük genlikli dalganın önüne geçtiği ve daha sonra birbirlerinden tamamen ayrılarak ilerledikleri görülmektedir. $t = 30$ zamanında büyük genlikli dalga $x_1 = 101$ konumunda $3c_1 = 5.3322724631$ genliğine, küçük genlikli dalga $x_2 = 78$ konumunda $3c_2 = 1.6833538118$ genliğine sahiptir. Bu durumda büyük genlikli dalganın hızı $v_1 = 2.8666666667$ ve küçük genlikli dalganın hızı $v_2 = 1.4333333333$ olup bu da dalgaların tamamen birbirlerinden ayrıldıktan sonra genliklerini ve hızlarını hemen hemen koruyarak sağa doğru hareket ettiklerini göstermektedir.

5. RLW DENKLEMİNİN ADAMS-BASHFORTH YÖNTEMİ İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, RLW denkleminin $F(U, U_x) = -U_x - \varepsilon U U_x$ olmak üzere

$$(U - \mu U_{xx})_t = F(U, U_x) \quad (5.0.1)$$

olarak düzenlenmiş formuna üç adım Adams-Bashforth yöntemine göre

$$(U - \mu U_{xx})_j^{n+1} = (U - \mu U_{xx})_j^n + \frac{\Delta t}{12} \left(23F_j^n - 16F_j^{n-1} + 5F_j^{n-2} \right) \quad (5.0.2)$$

şeklinde zaman ayrıklaştırması yapıldıktan sonra konuma göre türevler yerine sırasıyla üç ve beş nokta merkezi sonlu farklar yaklaşımları yazılarak iki sayısal şema elde edildi [50]. $\varepsilon = \mu = 1$ olmak üzere önerilen sayısal şemaların doğruluğunu görmek için Bölüm 3'te verilen bir ve iki soliter dalganın hareketi problemlerine uygulanarak elde edilen sayısal sonuçların L_2 ve L_∞ hata normları, I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitleri ve korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları çizelgeler halinde sunuldu. Ayrıca bir ve iki soliter dalganın hareketinin fiziksel davranışlarını görmek için çeşitli grafikler çizildi.

5.1 Şema-2

RLW denkleminin üç adım Adams-Bashforth yöntemi ile zamana göre ayrıklaştırılmış formu olan (5.0.2) denkleminde konum değişkenine göre türevler yerine (2.1.8) ve (2.1.10) denklemleri ile verilen $O((\Delta x)^2)$ hata mertebesine sahip üç nokta merkezi sonlu farklar yaklaşımları yazılırsa

$$\begin{aligned} W_j^{n+1} - \mu \frac{W_{j-1}^{n+1} - 2W_j^{n+1} + W_{j+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} &= W_j^n - \mu \frac{W_{j-1}^n - 2W_j^n + W_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} \\ &+ \frac{23\Delta t}{12} \left(-\frac{W_{j+1}^n - W_{j-1}^n}{2\Delta x} - \varepsilon W_j^n \frac{W_{j+1}^n - W_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) \\ &- \frac{16\Delta t}{12} \left(-\frac{W_{j+1}^{n-1} - W_{j-1}^{n-1}}{2\Delta x} - \varepsilon W_j^{n-1} \frac{W_{j+1}^{n-1} - W_{j-1}^{n-1}}{2\Delta x} \right) \\ &+ \frac{5\Delta t}{12} \left(-\frac{W_{j+1}^{n-2} - W_{j-1}^{n-2}}{2\Delta x} - \varepsilon W_j^{n-2} \frac{W_{j+1}^{n-2} - W_{j-1}^{n-2}}{2\Delta x} \right) \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

elde edilir. (5.1.1) denklemi $n+1, n, n-1, n-2$ zaman seviyelerine göre düzenlenirse

$$\begin{aligned}
& -\frac{\mu}{(\Delta x)^2} W_{j-1}^{n+1} + \left(1 + \frac{2\mu}{(\Delta x)^2}\right) W_j^{n+1} - \frac{\mu}{(\Delta x)^2} W_{j+1}^{n+1} = \left(-\frac{\mu}{(\Delta x)^2} + \frac{23\Delta t}{24\Delta x} + \frac{23\varepsilon\Delta t}{24\Delta x} W_j^n\right) W_{j-1}^n \\
& + \left(1 + \frac{2\mu}{(\Delta x)^2}\right) W_j^n - \left(\frac{\mu}{(\Delta x)^2} + \frac{23\Delta t}{24\Delta x} + \frac{23\varepsilon\Delta t}{24\Delta x} W_j^n\right) W_{j+1}^n \\
& - \left(\frac{2\Delta t}{3\Delta x} + \frac{2\varepsilon\Delta t}{3\Delta x} W_j^{n-1}\right) W_{j-1}^{n-1} + \left(\frac{2\Delta t}{3\Delta x} + \frac{2\varepsilon\Delta t}{3\Delta x} W_j^{n-1}\right) W_{j+1}^{n-1} \\
& + \left(\frac{5\Delta t}{24\Delta x} + \frac{5\varepsilon\Delta t}{24\Delta x} W_j^{n-2}\right) W_{j-1}^{n-2} - \left(\frac{5\Delta t}{24\Delta x} + \frac{5\varepsilon\Delta t}{24\Delta x} W_j^{n-2}\right) W_{j+1}^{n-2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Katsayıları

$$\begin{aligned}
A_1 &= -\frac{\mu}{(\Delta x)^2}, & B_1 &= -\frac{\mu}{(\Delta x)^2} + \frac{23\Delta t}{24\Delta x} + \frac{23\varepsilon\Delta t}{24\Delta x} W_j^n, \\
A_2 &= 1 + \frac{2\mu}{(\Delta x)^2}, & B_2 &= 1 + \frac{2\mu}{(\Delta x)^2}, \\
A_3 &= -\frac{\mu}{(\Delta x)^2}, & B_3 &= -\frac{\mu}{(\Delta x)^2} - \frac{23\Delta t}{24\Delta x} - \frac{23\varepsilon\Delta t}{24\Delta x} W_j^n, \\
C_1 &= -\frac{2\Delta t}{3\Delta x} - \frac{2\varepsilon\Delta t}{3\Delta x} W_j^{n-1}, & D_1 &= \frac{5\Delta t}{24\Delta x} + \frac{5\varepsilon\Delta t}{24\Delta x} W_j^{n-2}, \\
C_3 &= \frac{2\Delta t}{3\Delta x} + \frac{2\varepsilon\Delta t}{3\Delta x} W_j^{n-1}, & D_3 &= -\frac{5\Delta t}{24\Delta x} - \frac{5\varepsilon\Delta t}{24\Delta x} W_j^{n-2}
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
A_1 W_{j-1}^{n+1} + A_2 W_j^{n+1} + A_3 W_{j+1}^{n+1} &= B_1 W_{j-1}^n + B_2 W_j^n + B_3 W_{j+1}^n \\
&+ C_1 W_{j-1}^{n-1} + C_3 W_{j+1}^{n-1} + D_1 W_{j-1}^{n-2} + D_3 W_{j+1}^{n-2}, \\
j &= 1, 2, \dots, M-1 \text{ ve } n = 2, 3, \dots, N-1 \text{ için} \quad (5.1.2)
\end{aligned}$$

şeklinde bilinmeyenleri $W_0^{n+1}, W_1^{n+1}, \dots, W_M^{n+1}$ olan $M+1$ tane bilinmeyen ve $M-1$ tane denklemden oluşan bir lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözülebilmesi için bilinmeyen sayısı ile denklem sayısı birbirine eşit olmalıdır. W_0 ve W_M bilinmeyenleri (3.0.3) ile verilen sınır şartından

$$\begin{aligned}
U(x_0, t) &= 0 \Rightarrow W_0 = 0 \\
U(x_M, t) &= 0 \Rightarrow W_M = 0
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. W_0 ve W_M değerleri (5.1.2) denklemi ile verilen denklem sisteminde yerlerine yazılırsa $M-1$ bilinmeyen ve $M-1$ denklemden oluşan bir lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_2 & A_3 & & & \\ A_1 & A_2 & A_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & A_1 & A_2 & A_3 \\ & & & A_1 & A_2 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} B_2 & B_3 & & & \\ B_1 & B_2 & B_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & B_1 & B_2 & B_3 \\ & & & B_1 & B_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & C_3 & & & \\ C_1 & 0 & C_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & C_1 & 0 & C_3 \\ & & & C_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D} = \begin{bmatrix} 0 & D_3 & & & \\ D_1 & 0 & D_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & D_1 & 0 & D_3 \\ & & & D_1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{W} = [W_1 \quad W_2 \quad \cdots \quad W_{M-1}]^T$$

olmak üzere matris formunda

$$\mathcal{A}\mathbf{W}^{n+1} = \mathcal{B}\mathbf{W}^n + \mathcal{C}\mathbf{W}^{n-1} + \mathcal{D}\mathbf{W}^{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots, N-1 \quad (5.1.3)$$

şeklinde yazılır. $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ matrislerinin boyutu $(M-1) \times (M-1)$ olup $\mathbf{W}$ matrisinin boyutu $(M-1) \times 1$ dir. (5.1.3) denklemi $n = 2$ için

$$\mathcal{A}\mathbf{W}^3 = \mathcal{B}\mathbf{W}^2 + \mathcal{C}\mathbf{W}^1 + \mathcal{D}\mathbf{W}^0$$

olduğundan $\mathbf{W}^3$ matrisini hesaplayabilmek için $\mathbf{W}^0, \mathbf{W}^1$ ve $\mathbf{W}^2$ matrislerinin bilinmesi gerekir. (3.0.2) denklemi ile verilen başlangıç şartından

$$\mathbf{W}^0 = [f(x_1) \quad f(x_2) \quad \cdots \quad f(x_{M-1})]^T$$

olarak, $\mathbf{W}^1$ ve $\mathbf{W}^2$ matrisleri ise herhangi bir tek adım yönteminden veya analitik çözümü bilinen problemler için analitik çözümden hesaplanır. Daha sonra istenen zaman adımına kadar (5.1.3) denkleminde işlemler ardışık olarak tekrarlanır.

5.2 Şema-2'nin Test Problemlerine Uygulanması

Bu kısımda (5.1.3) denklemi ile verilen şema bir soliter dalga ve iki soliter dalga problemlerine uygulanarak sayısal sonuçlar elde edildi.

5.2.1 Bir soliter dalganın hareketi

Bu kısımda bir soliter dalganın hareketi $[-80, 120]$ konum aralığında $x_0 = 0$ olmak üzere sırasıyla $c = 0.1$ ve $c = 0.03$ için Şema-2 uygulanarak çeşitli zaman ve konum adım uzunlukları için elde edilen sayısal sonuçların hata normları, korunum sabitleri ve korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları $[0, 20]$ zaman aralığında hesaplanarak çizelgeler halinde verildi ve çeşitli grafikler çizildi.

Durum 1 : Bu durumda $c = 0.1$ olarak alındı. İlk olarak $t = 5, 10, 15, 20$ zamanlarında bir soliter dalganın hareketi $\Delta t = 0.1$ ve $\Delta x = 0.1, 0.05, 0.025$ adım uzunlukları için Şema-2 ile elde

Çizelge 5.1 : Şema-2 ile bir soliter dalğanın $c = 0.1$ için korunum sabitleri ve hata normları : $\Delta t = 0.1, \Delta x = 0.1, 0.05, 0.025$

Δx	t	I_1	I_2	I_3	L_2	L_∞
0.1	5	3.9799497485	0.8104537846	2.5789890274	$8.3323030933e-5$	$3.2485421724e-5$
	10	3.9799497486	0.8104479784	2.5789698598	$1.6808104002e-4$	$6.5492236576e-5$
	15	3.9799497487	0.8104421732	2.5789506931	$2.4960838711e-4$	$9.5865784203e-5$
	20	3.9799497488	0.8104363694	2.5789315301	$3.2744861854e-4$	$1.2349082100e-4$
0.05	5	3.9799497485	0.8104561335	2.5789890305	$2.3814994817e-5$	$9.8434839881e-6$
	10	3.9799497486	0.8104503255	2.5789698630	$4.7568264595e-5$	$1.9361825187e-5$
	15	3.9799497487	0.8104445182	2.5789506980	$6.9919952099e-5$	$2.7440058047e-5$
	20	3.9799497488	0.8104387116	2.5789315353	$9.0915149314e-5$	$3.4483686629e-5$
0.025	5	3.9799497484	0.8104567207	2.5789890303	$1.3620220919e-5$	$5.9349359751e-6$
	10	3.9799497485	0.8104509117	2.5789698602	$2.6690124887e-5$	$1.0514878987e-5$
	15	3.9799497486	0.8104451032	2.5789506919	$3.8286138147e-5$	$1.4563177003e-5$
	20	3.9799497487	0.8104392951	2.5789315250	$4.8551094180e-5$	$1.7811643099e-5$
Analitik Çözüm		3.9799497484	0.8104624942	2.5790074370		

Çizelge 5.2 : Şema-2 ile bir soliter dalğanın $c = 0.1$ için korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta t = 0.1, \Delta x = 0.1, 0.05, 0.025$

Δx	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3
0.1	$3.3498004370e-10$	$2.6124870071e-5$	$7.5906890280e-5$
0.05	$3.8362646393e-10$	$2.3782640720e-5$	$7.5901645061e-5$
0.025	$2.7539748260e-10$	$2.3199099168e-5$	$7.5912012143e-5$

edilen sayısal sonuçların korunum sabitleri ve hata normları Çizelge 5.1’de ve $t = 20$ zamanında korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları Çizelge 5.2’de verildi. Çizelge 5.1’den $\Delta x \rightarrow 0$ için $L_2 \rightarrow 0$, $L_\infty \rightarrow 0$ olduğu ve korunum sabitlerinin analitik değerleri ile uyumlu olduğu görüldü. Çizelge 5.2’den kütle ve enerji korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarlarının hemen hemen aynı kaldığı, momentum korunum sabitinin mutlak değişim miktarının küçüldüğü ve sonuç olarak önerilen şemanın korunum sabitlerini iyi bir şekilde koruduğu görüldü.

Daha sonra bir soliter dalğanın hareketi $t = 5, 10, 15, 20$ zamanlarında $\Delta x = 0.1$ ve $\Delta t = 0.1, 0.05, 0.025$ adım uzunlukları için Şema-2 ile elde edilen sayısal sonuçların korunum sabitleri ve hata normları Çizelge 5.3’te ve $t = 20$ zamanında korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları Çizelge 5.4’te verildi. Çizelge 5.3’ten $\Delta t \rightarrow 0$ için L_2 ve L_∞ hata normlarının yeterince küçük ama hemen hemen aynı kaldığı ve korunum sabitlerinin analitik değerleri ile uyumlu olduğu görüldü. Çizelge 5.4’ten $\Delta t \rightarrow 0$ için korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarlarının küçüldüğü ve önerilen şemanın korunum sabitlerini iyi bir şekilde koruduğu görüldü.

Daha sonra bir soliter dalğanın hareketi $t = 5, 10, 15, 20$ zamanlarında $\Delta x = \Delta t = 0.1, 0.05, 0.025$ adım uzunlukları için Şema-2 ile elde edilen sayısal sonuçların korunum sabitleri ve hata normları Çizelge 5.5’te ve $t = 20$ zamanında korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları Çizelge 5.6’da verildi. Çizelge 5.5’ten $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$ için $L_2 \rightarrow 0$, $L_\infty \rightarrow 0$ olduğu ve korunum sabitlerinin analitik değerleri ile uyumlu olduğu görüldü. Çizelge 5.6’dan

Çizelge 5.3 : Şema-2 ile bir soliter dalganın $c = 0.1$ için korunum sabitleri ve hata normları : $\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.1, 0.05, 0.025$

Δt	t	I_1	I_2	I_3	L_2	L_∞
0.1	5	3.9799497485	0.8104537846	2.5789890274	$8.3323030933e-5$	$3.2485421724e-5$
	10	3.9799497486	0.8104479784	2.5789698598	$1.6808104002e-4$	$6.5492236576e-5$
	15	3.9799497487	0.8104421732	2.5789506931	$2.4960838711e-4$	$9.5865784203e-5$
	20	3.9799497488	0.8104363694	2.5789315301	$3.2744861854e-4$	$1.2349082100e-4$
0.05	5	3.9799497485	0.8104586487	2.5790050800	$8.4726299126e-5$	$3.2565296974e-5$
	10	3.9799497486	0.8104579200	2.5790026690	$1.6934019149e-4$	$6.5824799874e-5$
	15	3.9799497487	0.8104571903	2.5790002523	$2.5084461324e-4$	$9.6709713031e-5$
	20	3.9799497488	0.8104564602	2.5789978329	$3.2867829570e-4$	$1.2480097400e-4$
0.025	5	3.9799497485	0.8104592711	2.5790071342	$8.5617906330e-5$	$3.2880224851e-5$
	10	3.9799497486	0.8104591777	2.5790068198	$1.7025676569e-4$	$6.6204533360e-5$
	15	3.9799497487	0.8104590832	2.5790064991	$2.5177927063e-4$	$9.7151153483e-5$
	20	3.9799497487	0.8104589880	2.5790061750	$3.2961868879e-4$	$1.2529537543e-4$
Analitik Çözüm		3.9799497484	0.8104624942	2.5790074370		

Çizelge 5.4 : Şema-2 ile bir soliter dalganın $c = 0.1$ için korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.1, 0.05, 0.025$

Δt	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3
0.1	$3.3498004370e-10$	$2.6124870071e-5$	$7.5906890280e-5$
0.05	$3.2685143481e-10$	$6.0340495205e-6$	$9.6040737576e-6$
0.025	$2.9048452532e-10$	$3.5062077500e-6$	$1.2619335332e-6$

kütle korunum sabitinin mutlak değişim miktarının hemen hemen aynı kaldığı, momentum ve enerji korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarlarının küçüldüğü ve sonuç olarak korunum sabitlerinin iyi bir şekilde korunduğu görüldü.

Son olarak bir soliter dalganın hareketi $\Delta x = 0.4, 0.2, 0.1, 0.05$ ve $\Delta t = 0.2, 0.1, 0.05$ adım uzunlukları için Şema-2 ile elde edilen sayısal sonuçların $t = 20$ zamanındaki korunum sabitleri ve hata normları Çizelge 5.7 ile verildi. Çizelge 5.7’den $\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$ için $L_2 \rightarrow 0, L_\infty \rightarrow 0$ olduğu ve korunum sabitlerinin analitik değerler ile uyumlu olduğu görüldü.

Bir soliter dalganın hareketi $t = 5, 10, 15, 20$ zamanlarında $\Delta t = 0.1$ ve $\Delta x = 0.1$ adım uzunlukları için Şema-2 ile elde edilen sayısal çözümü ile analitik çözümünün grafikleri Şekil 5.1’de ve $t = 20$ zamanında mutlak hatanın grafiği Şekil 5.2’de verildi. Şekil 5.1’den sayısal çözüm ile analitik çözümün grafiklerinin çakıştığı görüldü ve $t = 0$ zamanında $x = 0$ konumunda dalganın genliği $3c = 0.3$ iken $t = 5, 10, 15, 20$ zamanlarında dalganın genliği sırasıyla $x = 5.6, 11.1, 16.6, 22.1$ konumlarında $3c = 0.2999907772, 0.2999784639, 0.2999658667, 0.2999538691$ olarak elde edildi. Böylece $[0, 20]$ zaman aralığında dalganın genliğinin başlangıç zamanındaki genliği ile uyumlu olduğu ve bir soliter dalganın zamanla şeklini bozmadan $v = 1.105$ hızıyla sağa doğru hareket ettiği görüldü. Şekil 5.2’den Şema-2’nin mutlak hatasının en büyük değerinin konum aralığının ortalarında ve Çizelge 5.1 ile uyumlu olduğu görüldü.

Çizelge 5.5 : Şema-2 ile bir soliter dalganın $c = 0.1$ için korunum sabitleri ve hata normları : $\Delta x = \Delta t = 0.1, 0.05, 0.025$

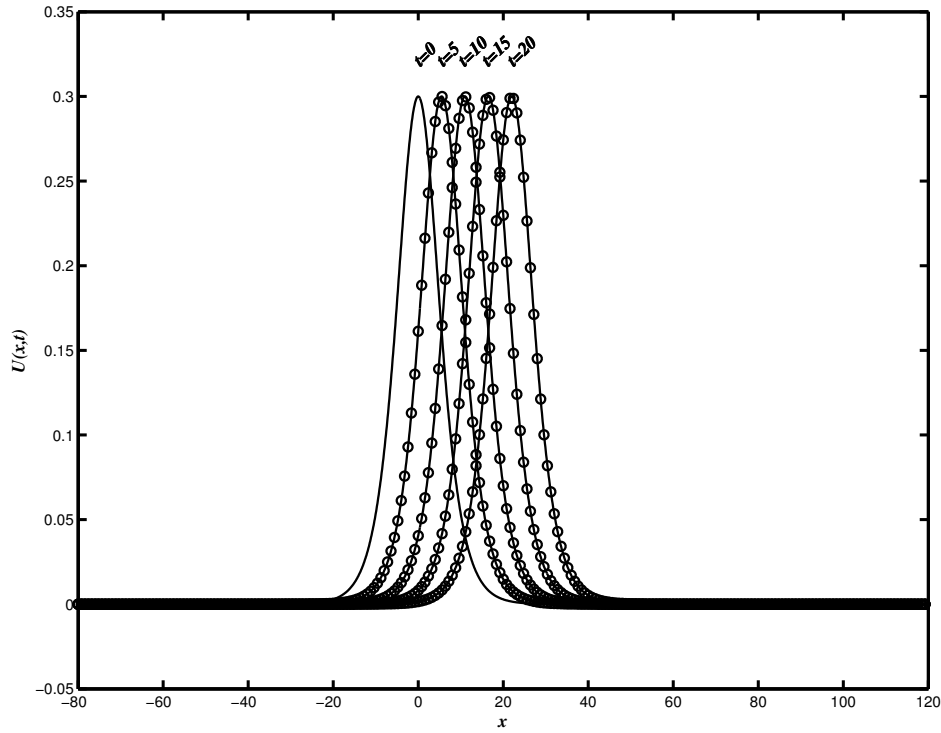
$\Delta x = \Delta t$	t	I_1	I_2	I_3	L_2	L_∞
0.1	5	3.9799497485	0.8104537846	2.5789890274	$8.3323030933e-5$	$3.2485421724e-5$
	10	3.9799497486	0.8104479784	2.5789698598	$1.6808104002e-4$	$6.5492236576e-5$
	15	3.9799497487	0.8104421732	2.5789506931	$2.4960838711e-4$	$9.5865784203e-5$
	20	3.9799497488	0.8104363694	2.5789315301	$3.2744861854e-4$	$1.2349082100e-4$
0.05	5	3.9799497484	0.8104609986	2.5790050857	$2.1202975624e-5$	$8.1961203571e-6$
	10	3.9799497486	0.8104602718	2.5790026867	$4.2359072138e-5$	$1.6471602802e-5$
	15	3.9799497487	0.8104595449	2.5790002875	$6.2729825318e-5$	$2.4132953735e-5$
	20	3.9799497487	0.8104588181	2.5789978883	$8.2186058780e-5$	$3.1106584456e-5$
0.025	5	3.9799497482	0.8104622084	2.5790071397	$5.3516076003e-6$	$2.0614138376e-6$
	10	3.9799497481	0.8104621174	2.5790068394	$1.0639843036e-5$	$4.1363279301e-6$
	15	3.9799497480	0.8104620264	2.5790065391	$1.5733116274e-5$	$6.0610252747e-6$
	20	3.9799497479	0.8104619354	2.5790062388	$2.0597577957e-5$	$7.8124622035e-6$
Analitik Çözüm		3.9799497484	0.8104624942	2.5790074370		

Çizelge 5.6 : Şema-2 ile bir soliter dalganın $c = 0.1$ için korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta x = \Delta t = 0.1, 0.05, 0.025$

$\Delta x = \Delta t$	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3
0.1	$3.3498004370e-10$	$2.6124870071e-5$	$7.5906890280e-5$
0.05	$3.1309088655e-10$	$3.6761120855e-6$	$9.5487039591e-6$
0.025	$5.0638693239e-10$	$5.5884190764e-7$	$1.1981991492e-6$

Çizelge 5.7 : Şema-2 ile bir soliter dalganın $c = 0.1$ için korunum sabitleri ve hata normları : $\Delta x = 0.4, 0.2, 0.1, 0.05$ ve $\Delta t = 0.2, 0.1, 0.05$

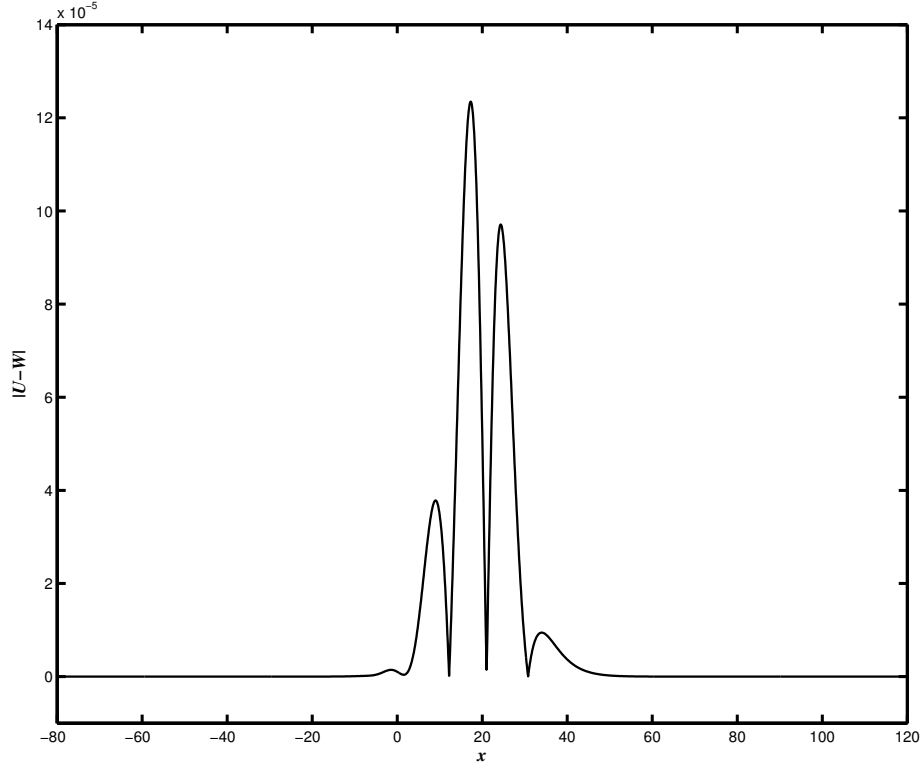
Δx	Δt	I_1	I_2	I_3	L_2	L_∞
0.4	0.2	3.9799497485	0.8102312756	2.5784023725	$5.1359565564e-3$	$1.9357467031e-3$
	0.1	3.9799497485	0.8103869356	2.5789162282	$5.2124122438e-3$	$1.9778579287e-3$
	0.05	3.9799497485	0.8104066950	2.5789814215	$5.2395204829e-3$	$1.9887279160e-3$
0.2	0.2	3.9799497486	0.8102691658	2.5784102302	$1.3043961442e-3$	$4.8944660355e-4$
	0.1	3.9799497486	0.8104268759	2.5789307777	$1.3059772945e-3$	$4.9517809526e-4$
	0.05	3.9799497486	0.8104469030	2.5789968746	$1.3141637263e-3$	$4.9922151203e-4$
0.1	0.2	3.9799497487	0.8102781476	2.5784093345	$4.5579342001e-4$	$1.7350357152e-4$
	0.1	3.9799497488	0.8104363694	2.5789315301	$3.2744861854e-4$	$1.2349082100e-4$
	0.05	3.9799497488	0.8104564602	2.579978329	$3.2867829570e-4$	$1.2480097400e-4$
0.05	0.2	3.9799497488	0.8102803620	2.5784089293	$3.5931022690e-4$	$1.3528897935e-4$
	0.1	3.9799497488	0.8104387116	2.5789315353	$9.0915149314e-5$	$3.4483686629e-5$
	0.05	3.9799497487	0.8104588181	2.5789978883	$8.2186058780e-5$	$3.1106584456e-5$
Analitik Çözüm		3.9799497484	0.8104624942	2.5790074370		



Şekil 5.1 : Şema-2 ile bir soliter dalganın çeşitli zamanlarda yaklaşık ($\circ$) ve analitik çözümleri ($-$) : $c = 0.1$, $\Delta x = \Delta t = 0.1$

Durum 2 : Bu durumda $c = 0.03$ olarak alındı. İlk olarak $t = 5, 10, 15, 20$ zamanlarında bir soliter dalganın hareketi $\Delta t = 0.1$ ve $\Delta x = 0.1, 0.05, 0.025$ adım uzunlukları için Şema-2 ile elde edilen sayısal sonuçların korunum sabitleri ve hata normları Çizelge 5.8’de ve $t = 20$ zamanında korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları Çizelge 5.9’da verildi. Çizelge 5.8’den $\Delta x \rightarrow 0$ için $L_2 \rightarrow 0$, $L_\infty \rightarrow 0$ olduğu ve korunum sabitlerinin analitik değerler ile uyumlu olduğu görüldü. Çizelge 5.9’dan kütle ve enerji korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarlarının hemen hemen aynı kaldığı, momentum korunum sabitinin mutlak değişim miktarının küçüldüğü ve sonuç olarak önerilen şemanın korunum sabitlerini iyi bir şekilde koruduğu görüldü.

Daha sonra bir soliter dalganın hareketi $t = 5, 10, 15, 20$ zamanlarında $\Delta x = 0.1$ ve $\Delta t = 0.1, 0.05, 0.025$ adım uzunlukları için Şema-2 ile elde edilen sayısal sonuçların korunum sabitleri ve hata normları Çizelge 5.10’da ve $t = 20$ zamanında korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları Çizelge 5.11’de verildi. Çizelge 5.10’dan $\Delta t \rightarrow 0$ için L_2 ve L_∞ hata normlarının hemen hemen aynı kaldığı ve korunum sabitlerinin analitik değerler ile uyumlu olduğu görüldü. Çizelge 5.11’den kütle korunum sabitinin mutlak değişim miktarının hemen hemen aynı kaldığı,



Şekil 5.2 : Şema-2 ile bir soliter dalğanın $t = 20$ zamanında mutlak hata grafiği : $c = 0.1$, $\Delta x = \Delta t = 0.1$

momentum ve enerji korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarlarının küçüldüğü ve sonuçta korunum sabitlerinin iyi bir şekilde korunduğu görüldü.

Daha sonra bir soliter dalğanın hareketi $t = 5, 10, 15, 20$ zamanlarında $\Delta x = \Delta t = 0.1, 0.05, 0.025$ adım uzunlukları için Şema-2 ile elde edilen sayısal sonuçların korunum sabitleri ve hata normları Çizelge 5.12’de ve $t = 20$ zamanında korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları Çizelge 5.13’te verildi. Çizelge 5.12’den $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$ için $L_2 \rightarrow 0$, $L_\infty \rightarrow 0$ olduğu ve korunum sabitlerinin analitik değerler ile uyumlu olduğu görüldü. Çizelge 5.13’ten kütle korunum sabitinin mutlak değişim miktarının hemen hemen aynı kaldığı, momentum ve enerji korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarlarının küçüldüğü ve sonuç olarak önerilen şemanın korunum sabitlerini iyi bir şekilde koruduğu görüldü.

Son olarak bir soliter dalğanın hareketi $\Delta x = 0.4, 0.2, 0.1, 0.05$ ve $\Delta t = 0.2, 0.1, 0.05$ adım uzunlukları için Şema-2 ile elde edilen sayısal sonuçların $t = 20$ zamanında korunum sabitleri ve hata normları Çizelge 5.14 ile verildi. Çizelge 5.14’ten $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$ için L_2 ve L_∞ hata

Çizelge 5.8 : Şema-2 ile bir soliter dalğanın $c = 0.03$ için korunum sabitleri ve hata normları : $\Delta t = 0.1, \Delta x = 0.1, 0.05, 0.025$

Δx	t	I_1	I_2	I_3	L_2	L_∞
0.1	5	2.1094068869	0.1273016028	0.3888057904	$6.1730044406e-6$	$1.7885195180e-6$
	10	2.1094082959	0.1273015355	0.3888055823	$1.2591393206e-5$	$3.6988006771e-6$
	15	2.1094093948	0.1273014681	0.3888053742	$1.8986063501e-5$	$5.6347960019e-6$
	20	2.1094102018	0.1273014008	0.3888051661	$2.5348163218e-5$	$7.5753887195e-6$
0.05	5	2.1094070071	0.1273016412	0.3888057905	$1.6037675486e-6$	$4.6648766347e-7$
	10	2.1094086899	0.1273015738	0.3888055824	$3.2760948477e-6$	$9.6437969543e-7$
	15	2.1094101829	0.1273015065	0.3888053743	$4.9316624630e-6$	$1.4666407673e-6$
	20	2.1094114505	0.1273014391	0.3888051661	$6.5671052650e-6$	$1.9664776071e-6$
0.025	5	2.1094070719	0.1273016508	0.3888057905	$6.2024054576e-7$	$2.0831753745e-7$
	10	2.1094089136	0.1273015834	0.3888055824	$1.2918842468e-6$	$3.4885477408e-7$
	15	2.1094106552	0.1273015160	0.3888053742	$1.9346548388e-6$	$5.1383412599e-7$
	20	2.1094122408	0.1273014487	0.3888051661	$2.5396522498e-6$	$6.9241493213e-7$
Analitik Çözüm		2.1094074997	0.1273017186	0.3888059903		

Çizelge 5.9 : Şema-2 ile bir soliter dalğanın $c = 0.03$ için korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta t = 0.1, \Delta x = 0.1, 0.05, 0.025$

Δx	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3
0.1	$2.7021003395e-6$	$3.1786483554e-7$	$8.2428908077e-7$
0.05	$3.9507437521e-6$	$2.7951685522e-7$	$8.2421968312e-7$
0.025	$4.7410367747e-6$	$2.6994299721e-7$	$8.2426042985e-7$

Çizelge 5.10 : Şema-2 ile bir soliter dalğanın $c = 0.03$ için korunum sabitleri ve hata normları : $\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.1, 0.05, 0.025$

Δt	t	I_1	I_2	I_3	L_2	L_∞
0.1	5	2.1094068869	0.1273016028	0.3888057904	$6.1730044401e-6$	$1.7885195170e-6$
	10	2.1094082959	0.1273015355	0.3888055823	$1.2591393203e-5$	$3.6988006770e-6$
	15	2.1094093948	0.1273014681	0.3888053742	$1.8986063500e-5$	$5.6347960030e-6$
	20	2.1094102018	0.1273014008	0.3888051661	$2.5348163218e-5$	$7.5753887210e-6$
0.05	5	2.1094069082	0.1273016592	0.3888059648	$6.2992602058e-6$	$1.8192442185e-6$
	10	2.1094083361	0.1273016508	0.3888059388	$1.2716614102e-5$	$3.7261708275e-6$
	15	2.1094094489	0.1273016424	0.3888059127	$1.9111447203e-5$	$5.6630760864e-6$
	20	2.1094102669	0.1273016339	0.3888058866	$2.5474872331e-5$	$7.6071872477e-6$
0.025	5	2.1094069191	0.1273016665	0.3888059871	$6.3641106992e-6$	$1.8376538999e-6$
	10	2.1094083566	0.1273016654	0.3888059838	$1.2782111820e-5$	$3.7447342736e-6$
	15	2.1094094764	0.1273016643	0.3888059805	$1.9177612228e-5$	$5.6820295688e-6$
	20	2.1094102999	0.1273016633	0.3888059772	$2.5541748513e-5$	$7.6273998945e-6$
Analitik Çözüm		2.1094074997	0.1273017186	0.3888059903		

Çizelge 5.11 : Şema-2 ile bir soliter dalğanın $c = 0.03$ için korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.1, 0.05, 0.025$

Δt	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3
0.1	$2.7021003395e-6$	$3.1786483554e-7$	$8.2428908077e-7$
0.05	$2.7671546663e-6$	$8.4678669132e-8$	$1.0373837822e-7$
0.025	$2.8001701318e-6$	$5.5363575641e-8$	$1.3154296985e-8$

Çizelge 5.12 : Şema-2 ile bir soliter dalğanın $c = 0.03$ için korunum sabitleri ve hata normları : $\Delta x = \Delta t = 0.1, 0.05, 0.025$

$\Delta x = \Delta t$	t	I_1	I_2	I_3	L_2	L_∞
0.1	5	2.1094068869	0.1273016028	0.3888057904	$6.1730044401e-6$	$1.7885195170e-6$
	10	2.1094082959	0.1273015355	0.3888055823	$1.2591393203e-5$	$3.6988006770e-6$
	15	2.1094093948	0.1273014681	0.3888053742	$1.8986063500e-5$	$5.6347960030e-6$
	20	2.1094102018	0.1273014008	0.3888051661	$2.5348163218e-5$	$7.5753887210e-6$
0.05	5	2.1094070345	0.1273016976	0.3888059648	$1.5953172706e-6$	$4.5556456342e-7$
	10	2.1094087442	0.1273016892	0.3888059388	$3.2269868607e-6$	$9.3267439386e-7$
	15	2.1094102598	0.1273016807	0.3888059128	$4.8431831646e-6$	$1.4168330205e-6$
	20	2.1094115475	0.1273016723	0.3888058867	$6.4410558839e-6$	$1.9024111118e-6$
0.025	5	2.1094071184	0.1273017144	0.3888059871	$4.9382701302e-7$	$2.1789708169e-7$
	10	2.1094090079	0.1273017133	0.3888059838	$1.0299068553e-6$	$2.9760921022e-7$
	15	2.1094107924	0.1273017122	0.3888059805	$1.5306863276e-6$	$3.5524686251e-7$
	20	2.1094124186	0.1273017112	0.3888059772	$1.9877900559e-6$	$4.7672569674e-7$
Analitik Çözüm		2.1094074997	0.1273017186	0.3888059903		

Çizelge 5.13 : Şema-2 ile bir soliter dalğanın $c = 0.03$ için korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta x = \Delta t = 0.1, 0.05, 0.025$

$\Delta x = \Delta t$	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3
0.1	$2.7021003395e-6$	$3.1786483554e-7$	$8.2428908077e-7$
0.05	$4.0477725474e-6$	$4.6311096014e-8$	$1.0361217456e-7$
0.025	$4.9188959435e-6$	$7.4597173161e-9$	$1.3186738257e-8$

normlarının yeterince küçük ama hemen hemen aynı kaldığı ve korunum sabitlerinin analitik değerleri ile uyumlu olduğu görüldü.

Bir soliter dalğanın hareketi $t = 5, 10, 15, 20$ zamanlarında $\Delta t = 0.1$ ve $\Delta x = 0.1$ adım uzunlukları için Şema-2 ile elde edilen sayısal çözümü ile analitik çözümünün grafikleri Şekil 5.3'te ve $t = 20$ zamanında mutlak hatanın grafiği Şekil 5.4'te verildi. Şekil 5.3'ten sayısal çözüm ile analitik çözümün grafiklerinin çakıştığı ve $t = 0$ zamanında $x = 0$ konumunda dalğanın genliği $3c = 0.09$ iken $t = 5, 10, 15, 20$ zamanlarında dalğanın genliği sırasıyla $x = 5.2, 10.4, 15.5, 20.7$ konumlarında $3c = 0.0899981726, 0.0899994393, 0.0899974424, 0.0899984891$ olarak elde edildi. Böylece $[0, 20]$ zaman aralığında dalğanın genliğinin başlangıç zamanındaki genliği ile uyumlu olduğu ve bir soliter dalğanın şeklini bozmadan $v = 1.035$ hızıyla sağa doğru hareket ettiği görüldü. Şekil 5.4'ten Şema-2'nin mutlak hatasının en büyük değerinin konum aralığının ortalarında ve Çizelge 5.8 ile uyumlu olduğu görüldü.

5.2.2 İki soliter dalğanın hareketi

Bu kısımda, $k_1 = 0.4$, $k_2 = 0.3$, $x_1 = 15$, $x_2 = 35$ için $[0, 120]$ konum aralığında $t = 30$ zamanına kadar Şema-2 ile elde edilen sayısal sonuçlarla iki soliter dalğanın hareketi gözlemlendi. Elde edilen sayısal sonuçların doğruluğunu görmek için korunum sabitleri ve korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları hesaplanarak çizelgeler halinde verildi. Teorik olarak

Çizelge 5.14 : Şema-2 ile bir soliter dalğanın $c = 0.03$ için korunum sabitleri ve hata normları : $\Delta x = 0.4, 0.2, 0.1, 0.05$ ve $\Delta t = 0.2, 0.1, 0.05$

Δx	Δt	I_1	I_2	I_3	L_2	L_∞
0.4	0.2	2.1094070942	0.1272987896	0.3887994504	$4.0050145328e-4$	$1.1955686847e-4$
	0.1	2.1094070848	0.1273006271	0.3888051284	$4.0513843539e-4$	$1.2111392183e-4$
	0.05	2.1094070799	0.1273008597	0.3888058472	$4.0722209825e-4$	$1.2175803694e-4$
0.2	0.2	2.1094085402	0.1272994050	0.3887994719	$1.0038826987e-4$	$3.0055884616e-5$
	0.1	2.1094085923	0.1273012470	0.3888051640	$1.0131126575e-4$	$3.0260997846e-5$
	0.05	2.1094086192	0.1273014801	0.3888058843	$1.0186019169e-4$	$3.0432819031e-5$
0.1	0.2	2.1094100757	0.1272995576	0.3887994705	$2.7648595229e-5$	$8.5055304633e-6$
	0.1	2.1094102018	0.1273014008	0.3888051661	$2.5348163218e-5$	$7.5753887195e-6$
	0.05	2.1094102669	0.1273016339	0.3888058866	$2.5474872331e-5$	$7.6071872477e-6$
0.05	0.2	2.1094112625	0.1272995956	0.3887994698	$1.4343880837e-5$	$4.6400940283e-6$
	0.1	2.1094114505	0.1273014391	0.3888051661	$6.5671052650e-6$	$1.9664776071e-6$
	0.05	2.1094115475	0.1273016723	0.3888058867	$6.4410558839e-6$	$1.9024111118e-6$
Analitik Çözüm		2.1094074997	0.1273017186	0.3888059903		

dalgaların başlangıç anındaki genlikleri $3c_1 = 5.3333$ ve $3c_2 = 1.6875$ olup hızları sırasıyla $v_1 = 2.7778$ ve $v_2 = 1.5625$ 'tir.

İlk olarak iki soliter dalğanın hareketi $t = 2, 4, \dots, 30$ zamanlarında $\Delta x = 0.1$ ve $\Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$ adım uzunlukları için Şema-2 ile elde edilen sayısal sonuçların korunum sabitleri Çizelge 5.15'te, korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları Çizelge 5.16'da verildi. Çizelge 5.15 ve Çizelge 5.16'dan Δt adım uzunluğu küçüldükçe korunum sabitlerinin analitik değerler ile daha uyumlu sonuçlar verdiği ancak dalgaların birbiri ile etkileşmeye başladığı zamandan ayrıldıkları zamana kadar korunum sabitlerinin bir miktar bozulduğu görüldü.

Daha sonra iki soliter dalğanın hareketi $t = 2, 4, \dots, 30$ zamanlarında $\Delta x = 0.05$ ve $\Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$ adım uzunlukları için Şema-2 ile elde edilen sayısal sonuçların korunum sabitleri Çizelge 5.17'de, korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları Çizelge 5.18'de verildi. Çizelge 5.17 ve Çizelge 5.18'den $\Delta t = 0.1$ için korunum sabitlerinin çok iyi korunmadığı fakat Δt adım uzunluğu küçüldükçe korunum sabitlerinin analitik değerler ile daha uyumlu olduğu görüldü.

Son olarak iki soliter dalğanın hareketi $t = 2, 4, \dots, 30$ zamanlarında $\Delta x = 0.025$ ve $\Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$ adım uzunlukları için Şema-2 ile elde edilen sayısal sonuçların korunum sabitleri Çizelge 5.19'da, korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları Çizelge 5.20'de verildi. Çizelge 5.19 ve Çizelge 5.20'den $\Delta t = 0.1$ için korunum sabitlerinin çok iyi korunmadığı fakat Δt adım uzunluğu küçüldükçe korunum sabitlerinin analitik değerler ile oldukça uyumlu olduğu görüldü.

Sonuç olarak Çizelge 5.15 - Çizelge 5.20'den zaman ve konum adım uzunlukları küçüldükçe korunum sabitlerinin analitik değerler ile oldukça uyumlu olduğu görüldü.

Çizelge 5.15 : Şema-2 ile iki soliter dalganın korunum sabitleri: $\Delta x = 0.1$, $\Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$

$\Delta t = 0.1$						$\Delta t = 0.01$					
t	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3					
2	37.9168916341	119.7189437930	737.5207108340	37.9168916018	120.5029927800	744.0726365676					
4	37.9170669602	118.8638430747	730.4195459900	37.9170669212	120.5018919992	744.0628407313					
6	37.9172618240	118.0281374591	723.5035775768	37.9172619037	120.5003831016	744.0480378265					
8	37.9174570747	117.2175646288	716.8277588784	37.9174569734	120.4973578274	744.0123872851					
10	37.9176351962	116.4618122175	710.6458524541	37.9176351840	120.4899020457	743.9052483061					
12	37.9177896946	115.8824697029	705.9015877316	37.9177899000	120.4757798800	743.6624822354					
14	37.9179238614	115.6864786174	704.0741209578	37.9179237908	120.4678710025	743.5110323828					
16	37.9180439385	115.5607852543	702.8702832541	37.9180435755	120.4785893897	743.7187572493					
18	37.9181544974	115.0854782626	699.0574348965	37.9181545949	120.4900057593	743.9193423837					
20	37.9182576878	114.4119327901	693.6214869641	37.9182583471	120.4944489296	743.9906957803					
22	37.9183533607	113.6900804462	687.7576524030	37.9183534405	120.4952054138	744.0051960305					
24	37.9184393246	112.9669641574	681.8794315110	37.9184382153	120.4947393767	744.0031458681					
26	37.9185135822	112.2542793631	676.0950359214	37.9185127599	120.4939327439	743.9968454173					
28	37.9185777113	111.5546059273	670.4287973860	37.9185789651	120.4930379834	743.9894956025					
30	37.9186328953	110.8682622676	664.8836665136	37.9186294705	120.4921205283	743.9818836103					
$\Delta t = 0.001$						$\Delta t = 0.0001$					
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3					
2	37.9168916003	120.5039179026	744.0803397854	37.9168915850	120.5039187522	744.0803469066					
4	37.9170669178	120.5037494304	744.0783011261	37.9170668832	120.5037511029	744.0783151403					
6	37.9172618984	120.5031695744	744.0712234476	37.9172618445	120.5031720664	744.0712443213					
8	37.9174569659	120.5010598642	744.0431651452	37.9174568926	120.5010631616	744.0431927421					
10	37.9176351748	120.4944573138	743.9430435000	37.9176350821	120.4944613520	743.9430772302					
12	37.9177898891	120.4809445145	743.7052693573	37.9177897770	120.4809490435	743.7053071584					
14	37.9179237776	120.4731988256	743.5554648086	37.9179236463	120.4732033970	743.5555033155					
16	37.9180435601	120.4841610361	743.7654695856	37.9180434111	120.4841657496	743.7655095686					
18	37.9181545786	120.4962549530	743.9716372502	37.9181544138	120.4962602594	743.9716821546					
20	37.9182583299	120.5015666071	744.0501617062	37.9182581501	120.5015726995	744.0502131335					
22	37.9183534211	120.5032407018	744.0722797717	37.9183532267	120.5032476301	744.0723381719					
24	37.9184381931	120.5037037865	744.0779576558	37.9184379840	120.5037115622	744.0780231388					
26	37.9185127367	120.5038289789	744.0794117145	37.9185125131	120.5038376048	744.0794843065					
28	37.9185789428	120.5038666801	744.0798226469	37.9185787048	120.5038761569	744.0799023553					
30	37.9186294378	120.5038818304	744.0799727684	37.9186291852	120.5038921582	744.0800595946					
Analitik Çözüm : $I_1 = 37.9166666667$, $I_2 = 120.5232340954$, $I_3 = 744.0812089579$											

Çizelge 5.16 : Şema-2 ile iki soliter dalganın korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta x = 0.1$, $\Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$

t	$\Delta t = 0.1$			$\Delta t = 0.01$		
	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3
2	$2.249674e-4$	$8.042903e-1$	$6.560498e+0$	$2.249351e-4$	$2.024132e-2$	$8.572390e-3$
4	$4.002935e-4$	$1.659391e+0$	$1.366166e+1$	$4.002546e-4$	$2.134210e-2$	$1.836823e-2$
6	$5.951574e-4$	$2.495097e+0$	$2.057763e+1$	$5.952370e-4$	$2.285099e-2$	$3.317113e-2$
8	$7.904080e-4$	$3.305669e+0$	$2.725345e+1$	$7.903067e-4$	$2.587627e-2$	$6.882167e-2$
10	$9.685296e-4$	$4.061422e+0$	$3.343536e+1$	$9.685174e-4$	$3.333205e-2$	$1.759607e-1$
12	$1.123028e-3$	$4.640764e+0$	$3.817962e+1$	$1.123234e-3$	$4.745422e-2$	$4.187267e-1$
14	$1.257195e-3$	$4.836755e+0$	$4.000709e+1$	$1.257124e-3$	$5.536309e-2$	$5.701766e-1$
16	$1.377272e-3$	$4.962449e+0$	$4.121093e+1$	$1.376909e-3$	$4.464471e-2$	$3.624517e-1$
18	$1.487831e-3$	$5.437756e+0$	$4.502377e+1$	$1.487928e-3$	$3.322834e-2$	$1.618666e-1$
20	$1.591021e-3$	$6.111301e+0$	$5.045972e+1$	$1.591680e-3$	$2.878517e-2$	$9.051318e-2$
22	$1.686694e-3$	$6.833154e+0$	$5.632356e+1$	$1.686774e-3$	$2.802868e-2$	$7.601293e-2$
24	$1.772658e-3$	$7.556270e+0$	$6.220178e+1$	$1.771549e-3$	$2.849472e-2$	$7.806309e-2$
26	$1.846916e-3$	$8.268955e+0$	$6.798617e+1$	$1.846093e-3$	$2.930135e-2$	$8.436354e-2$
28	$1.911045e-3$	$8.968628e+0$	$7.365241e+1$	$1.912298e-3$	$3.019611e-2$	$9.171336e-2$
30	$1.966229e-3$	$9.654972e+0$	$7.919754e+1$	$1.962804e-3$	$3.111357e-2$	$9.932535e-2$
t	$\Delta t = 0.001$			$\Delta t = 0.0001$		
	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3
2	$2.249336e-4$	$1.931619e-2$	$8.691725e-4$	$2.249184e-4$	$1.931534e-2$	$8.620513e-4$
4	$4.002511e-4$	$1.948467e-2$	$2.907832e-3$	$4.002166e-4$	$1.948299e-2$	$2.893818e-3$
6	$5.952317e-4$	$2.006452e-2$	$9.985510e-3$	$5.951778e-4$	$2.006203e-2$	$9.964637e-3$
8	$7.902992e-4$	$2.217423e-2$	$3.804381e-2$	$7.902259e-4$	$2.217093e-2$	$3.801622e-2$
10	$9.685081e-4$	$2.877678e-2$	$1.381655e-1$	$9.684154e-4$	$2.877274e-2$	$1.381317e-1$
12	$1.123222e-3$	$4.228958e-2$	$3.759396e-1$	$1.123110e-3$	$4.228505e-2$	$3.759018e-1$
14	$1.257111e-3$	$5.003527e-2$	$5.257441e-1$	$1.256980e-3$	$5.003070e-2$	$5.257056e-1$
16	$1.376893e-3$	$3.907306e-2$	$3.157394e-1$	$1.376744e-3$	$3.906835e-2$	$3.156994e-1$
18	$1.487912e-3$	$2.697914e-2$	$1.095717e-1$	$1.487747e-3$	$2.697384e-2$	$1.095268e-1$
20	$1.591663e-3$	$2.166749e-2$	$3.104725e-2$	$1.591483e-3$	$2.166140e-2$	$3.099582e-2$
22	$1.686754e-3$	$1.999339e-2$	$8.929186e-3$	$1.686560e-3$	$1.998647e-2$	$8.870786e-3$
24	$1.771526e-3$	$1.953031e-2$	$3.251302e-3$	$1.771317e-3$	$1.952253e-2$	$3.185819e-3$
26	$1.846070e-3$	$1.940512e-2$	$1.797243e-3$	$1.845846e-3$	$1.939649e-2$	$1.724651e-3$
28	$1.912276e-3$	$1.936742e-2$	$1.386311e-3$	$1.912038e-3$	$1.935794e-2$	$1.306603e-3$
30	$1.962771e-3$	$1.935226e-2$	$1.236190e-3$	$1.962519e-3$	$1.934194e-2$	$1.149363e-3$

Çizelge 5.17 : Şema-2 ile iki soliter dalgaının korunum sabitleri : $\Delta x = 0.05$, $\Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$

$\Delta t = 0.1$						$\Delta t = 0.01$		
t	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3		
2	37.9169040111	119.7295241965	737.4907430438	37.9169039782	120.5174751673	744.0733345044		
4	37.9170962702	118.8693901186	730.3487329221	37.9170962304	120.5164977930	744.0650716867		
6	37.9173167868	118.0290405148	723.3972375540	37.9173168640	120.5154167290	744.0555155550		
8	37.9175461992	117.2153686547	716.7045080705	37.9175460962	120.5139639813	744.0407971098		
10	37.9177659481	116.4602143245	710.5591901946	37.9177659341	120.5114506012	744.0086377902		
12	37.9179680987	115.8873591927	705.9527302024	37.9179682985	120.5074522738	743.9439958910		
14	37.9181545257	115.6970542317	704.2361081185	37.9181544501	120.5053628360	743.9050623191		
16	37.9183304512	115.5629382829	702.8910262350	37.9183300893	120.5078748746	743.9556350104		
18	37.9184998259	115.0748019647	698.8970453568	37.9184999216	120.5102124583	744.0014979002		
20	37.9186642811	114.3927259181	693.3642617430	37.9186649236	120.5106587351	744.0137971347		
22	37.9188230492	113.6653679066	687.4495952233	37.9188231104	120.5101494928	744.0116058200		
24	37.9189733033	112.9379795909	681.5365208850	37.9189722027	120.5093280753	744.0052258004		
26	37.9191125678	112.2215102549	675.7227694711	37.9191117744	120.5084203099	743.9977744169		
28	37.9192420831	111.5182959736	670.0296014926	37.9192433268	120.5074903031	743.9900593552		
30	37.9193626106	110.8285796301	664.4590841924	37.9193589688	120.5065545911	743.9822786513		
$\Delta t = 0.001$						$\Delta t = 0.0001$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3		
2	37.9169039717	120.5184050466	744.0810732338	37.9169039064	120.5184056140	744.0810781401		
4	37.9170962161	120.5183659237	744.0806163213	37.9170960734	120.5183669898	744.0806255599		
6	37.9173168421	120.5182199681	744.0788347497	37.9173166218	120.5182215293	744.0788482864		
8	37.9175460663	120.5176885897	744.0717566325	37.9175457684	120.5176906307	744.0717743239		
10	37.9177658965	120.5160340252	744.0466650892	37.9177655211	120.5160364781	744.0466863293		
12	37.9179682535	120.5126493665	743.9870651376	37.9179678005	120.5126519712	743.9870878056		
14	37.9181543970	120.5107230082	743.9497765144	37.9181538668	120.5107253026	743.9497971308		
16	37.9183300284	120.5134804281	744.0026197526	37.9183294240	120.5134825257	744.0026391739		
18	37.9184998543	120.5165013733	744.054109311	37.9184991795	120.5165037536	744.0541312245		
20	37.9186648501	120.5178227562	744.0736361112	37.9186641065	120.5178256224	744.0736621899		
22	37.9188230293	120.5182375459	744.0791160578	37.9188222177	120.5182409510	744.0791467668		
24	37.9189721133	120.5183514888	744.0805150914	37.9189712338	120.5183554448	744.0805505422		
26	37.9191116788	120.5183817065	744.0808682470	37.9191107314	120.5183862164	744.0809084669		
28	37.9192432268	120.5183902915	744.0809636433	37.9192422116	120.5183953561	744.0810086404		
30	37.9193588527	120.5183933074	744.0809946763	37.9193577696	120.5183989267	744.0810444504		
Analitik Çözüm : $I_1 = 37.9166666667$, $I_2 = 120.5232340954$, $I_3 = 744.0812089579$								

Çizelge 5.18 : Şema-2 ile iki soliter dalganın korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta x = 0.05$, $\Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$

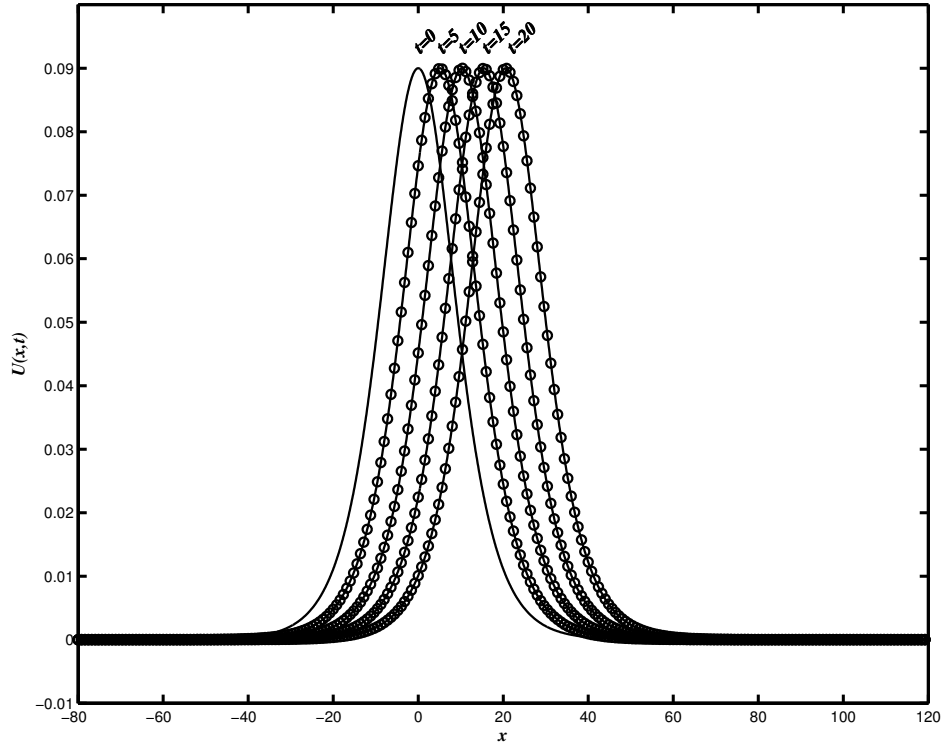
t	$\Delta t = 0.1$			$\Delta t = 0.01$		
	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3
2	$2.373444e-4$	$7.937099e-1$	$6.590466e+0$	$2.373116e-4$	$5.758928e-3$	$7.874453e-3$
4	$4.296036e-4$	$1.653844e+0$	$1.373248e+1$	$4.295637e-4$	$6.736302e-3$	$1.613727e-2$
6	$6.501201e-4$	$2.494194e+0$	$2.068397e+1$	$6.501974e-4$	$7.817366e-3$	$2.569340e-2$
8	$8.795326e-4$	$3.307865e+0$	$2.737670e+1$	$8.794296e-4$	$9.270114e-3$	$4.041185e-2$
10	$1.099281e-3$	$4.063020e+0$	$3.352202e+1$	$1.099267e-3$	$1.178349e-2$	$7.257117e-2$
12	$1.301432e-3$	$4.635875e+0$	$3.812848e+1$	$1.301632e-3$	$1.578182e-2$	$1.372131e-1$
14	$1.487859e-3$	$4.826180e+0$	$3.984510e+1$	$1.487783e-3$	$1.787126e-2$	$1.761466e-1$
16	$1.663785e-3$	$4.960296e+0$	$4.119018e+1$	$1.663423e-3$	$1.535922e-2$	$1.255739e-1$
18	$1.833159e-3$	$5.448432e+0$	$4.518416e+1$	$1.833255e-3$	$1.302164e-2$	$7.971106e-2$
20	$1.997614e-3$	$6.130508e+0$	$5.071695e+1$	$1.998257e-3$	$1.257536e-2$	$6.741182e-2$
22	$2.156383e-3$	$6.857866e+0$	$5.663161e+1$	$2.156444e-3$	$1.308460e-2$	$6.960314e-2$
24	$2.306637e-3$	$7.585255e+0$	$6.254469e+1$	$2.305536e-3$	$1.390602e-2$	$7.598316e-2$
26	$2.445901e-3$	$8.301724e+0$	$6.835844e+1$	$2.445108e-3$	$1.481379e-2$	$8.343454e-2$
28	$2.575416e-3$	$9.004938e+0$	$7.405161e+1$	$2.576660e-3$	$1.574379e-2$	$9.114960e-2$
30	$2.695944e-3$	$9.694654e+0$	$7.962212e+1$	$2.692302e-3$	$1.667950e-2$	$9.893031e-2$
t	$\Delta t = 0.001$			$\Delta t = 0.0001$		
	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3
2	$2.373050e-4$	$4.829049e-3$	$1.357240e-4$	$2.372397e-4$	$4.828481e-3$	$1.308178e-4$
4	$4.295494e-4$	$4.868172e-3$	$5.926366e-4$	$4.294068e-4$	$4.867106e-3$	$5.833979e-4$
6	$6.501754e-4$	$5.014127e-3$	$2.374208e-3$	$6.499552e-4$	$5.012566e-3$	$2.360671e-3$
8	$8.793996e-4$	$5.545506e-3$	$9.452325e-3$	$8.791018e-4$	$5.543465e-3$	$9.434634e-3$
10	$1.099230e-3$	$7.200070e-3$	$3.454387e-2$	$1.098854e-3$	$7.197617e-3$	$3.452263e-2$
12	$1.301587e-3$	$1.058473e-2$	$9.414382e-2$	$1.301134e-3$	$1.058212e-2$	$9.412115e-2$
14	$1.487730e-3$	$1.251109e-2$	$1.314324e-1$	$1.487200e-3$	$1.250879e-2$	$1.314118e-1$
16	$1.663362e-3$	$9.753667e-3$	$7.858921e-2$	$1.662757e-3$	$9.751570e-3$	$7.856978e-2$
18	$1.833188e-3$	$6.732722e-3$	$2.709965e-2$	$1.832513e-3$	$6.730343e-3$	$2.707773e-2$
20	$1.998183e-3$	$5.411339e-3$	$7.572847e-3$	$1.997440e-3$	$5.408473e-3$	$7.546768e-3$
22	$2.156363e-3$	$4.996549e-3$	$2.092900e-3$	$2.155551e-3$	$4.993144e-3$	$2.062191e-3$
24	$2.305447e-3$	$4.882607e-3$	$6.938665e-4$	$2.304567e-3$	$4.878651e-3$	$6.584157e-4$
26	$2.445012e-3$	$4.852389e-3$	$3.407109e-4$	$2.444065e-3$	$4.847879e-3$	$3.004910e-4$
28	$2.576560e-3$	$4.843804e-3$	$2.453146e-4$	$2.575545e-3$	$4.838739e-3$	$2.003175e-4$
30	$2.692186e-3$	$4.840788e-3$	$2.142816e-4$	$2.691103e-3$	$4.835169e-3$	$1.645075e-4$

Çizelge 5.19 : Şema-2 ile iki soliter dalgaının korunum sabitleri : $\Delta x = 0.025$, $\Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$

$\Delta t = 0.1$						$\Delta t = 0.01$					
t	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3					
2	37.9169105097	119.7321657690	737.4831453289	37.9169104753	120.5210955032	744.0734268765					
4	37.9171119692	118.8707647756	730.3308295938	37.9171119264	120.5201454581	744.0654919390					
6	37.9173468085	118.0292493970	723.3704201393	37.9173468810	120.5191715687	744.0572529995					
8	37.9175958868	117.2148014163	716.6734813645	37.9175957778	120.5181149533	744.0478213564					
10	37.9178403885	116.4597954533	710.5373203141	37.9178403671	120.5168401956	744.0344588610					
12	37.9180718622	115.8885638909	705.9653931168	37.9180720524	120.5153783990	744.0144906429					
14	37.9182916365	115.6996737393	704.2763823335	37.9182915500	120.5147342313	744.0035324317					
16	37.9185045316	115.5634359136	702.8957080127	37.9185041587	120.5151786399	744.0144944435					
18	37.9187142500	115.0720886801	698.8564325151	37.9187143326	120.5152483596	744.0217213727					
20	37.9189222183	114.3878810933	693.2994937038	37.9189228425	120.5147008643	744.0193493481					
22	37.9191274138	113.6591462917	687.3721378162	37.9191274547	120.5138779880	744.0130258211					
24	37.9193267122	112.9306883459	681.4503469262	37.9193255965	120.5129687289	744.0055766296					
26	37.9195173597	112.2132708375	675.6292462734	37.9195165548	120.5120359806	743.9978413341					
28	37.9197003618	111.5091693041	669.9293345569	37.9197015829	120.5110972366	743.9900359396					
30	37.9198762485	110.8186078877	664.3524601046	37.9198725302	120.5101569703	743.9822132480					
$\Delta t = 0.001$						$\Delta t = 0.0001$					
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3					
2	37.9169104546	120.5220265003	744.0811739143	37.9169102477	120.5220262411	744.0811723098					
4	37.9171118824	120.5220161191	744.0810564847	37.9171114432	120.5220154807	744.0810522737					
6	37.9173468139	120.5219787819	744.0806038620	37.9173461420	120.5219777596	744.0805970034					
8	37.9175956872	120.5218449132	744.0788239900	37.9175947825	120.5218434885	744.0788143207					
10	37.9178402533	120.5214302930	744.0725413112	37.9178391158	120.5214283878	744.0725281627					
12	37.9180719156	120.5205831628	744.0576269788	37.9180705452	120.5205804954	744.0576080894					
14	37.9182913896	120.5201019585	744.0483128880	37.9182897865	120.5200980389	744.0482845844					
16	37.9185039747	120.5207920541	744.0615423982	37.9185021388	120.5207869799	744.0615053996					
18	37.9187141259	120.5215465103	744.0744064344	37.9187120573	120.5215407617	744.0743643952					
20	37.9189226132	120.5218756979	744.0792754885	37.9189203118	120.5218694931	744.0792301839					
22	37.9191272013	120.5219783802	744.0806359612	37.9191246671	120.5219717777	744.0805878922					
24	37.9193253185	120.5220059620	744.0809779472	37.9193225515	120.5219989759	744.0809272369					
26	37.9195162539	120.5220126571	744.0810590710	37.9195132542	120.5220052915	744.0810057535					
28	37.9197012612	120.5220139583	744.0810759359	37.9196980287	120.522006213	744.0810200138					
30	37.9198721758	120.5220138714	744.0810767601	37.9198687105	120.5220057481	744.0810182395					
Analitik Çözüm : $I_1 = 37.9166666667$, $I_2 = 120.5232340954$, $I_3 = 744.0812089579$											

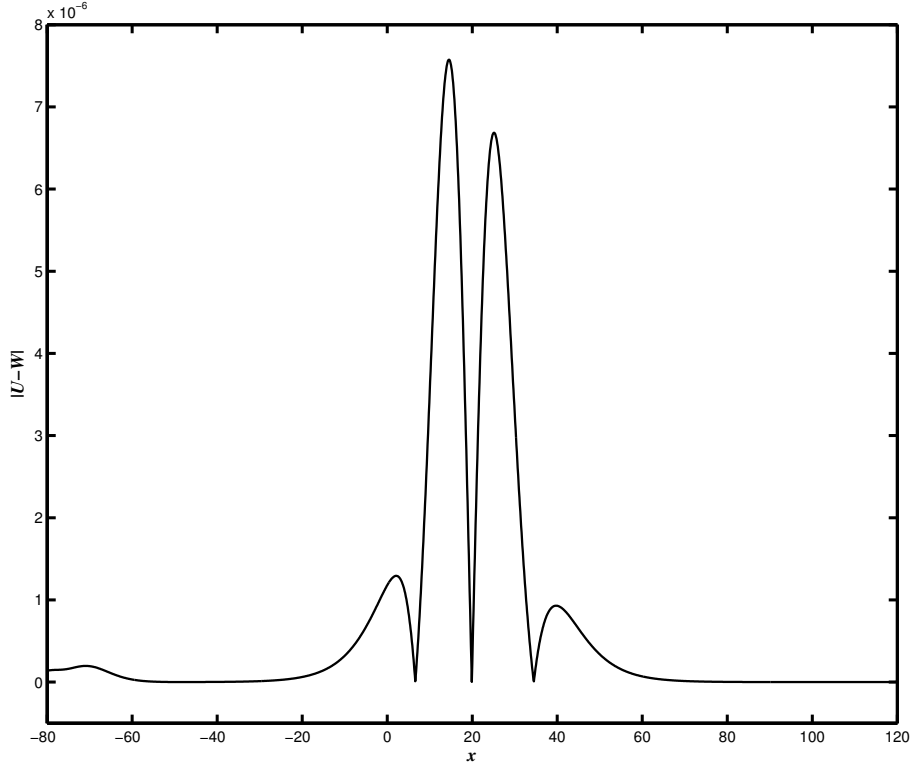
Çizelge 5.20 : Şema-2 ile iki soliter dalganın korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta x = 0.025$, $\Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$

t	$\Delta t = 0.1$			$\Delta t = 0.01$		
	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3
2	$2.438430e-4$	$7.910683e-1$	$6.598064e+0$	$2.438086e-4$	$2.138592e-3$	$7.782081e-3$
4	$4.453025e-4$	$1.652469e+0$	$1.375038e+1$	$4.452597e-4$	$3.088637e-3$	$1.571702e-2$
6	$6.801418e-4$	$2.493985e+0$	$2.071079e+1$	$6.802143e-4$	$4.062527e-3$	$2.395596e-2$
8	$9.292201e-4$	$3.308433e+0$	$2.740773e+1$	$9.291111e-4$	$5.119142e-3$	$3.338760e-2$
10	$1.173722e-3$	$4.063439e+0$	$3.354389e+1$	$1.173700e-3$	$6.393900e-3$	$4.675010e-2$
12	$1.405196e-3$	$4.634670e+0$	$3.811582e+1$	$1.405386e-3$	$7.855696e-3$	$6.671832e-2$
14	$1.624970e-3$	$4.823560e+0$	$3.980483e+1$	$1.624883e-3$	$8.499864e-3$	$7.767653e-2$
16	$1.837865e-3$	$4.959798e+0$	$4.118550e+1$	$1.837492e-3$	$8.055455e-3$	$6.671451e-2$
18	$2.047583e-3$	$5.451145e+0$	$4.522478e+1$	$2.047666e-3$	$7.985736e-3$	$5.948759e-2$
20	$2.255552e-3$	$6.135353e+0$	$5.078172e+1$	$2.256176e-3$	$8.533231e-3$	$6.185961e-2$
22	$2.460747e-3$	$6.864088e+0$	$5.670907e+1$	$2.460788e-3$	$9.356107e-3$	$6.818314e-2$
24	$2.660046e-3$	$7.592546e+0$	$6.263086e+1$	$2.658930e-3$	$1.026537e-2$	$7.563233e-2$
26	$2.850693e-3$	$8.309963e+0$	$6.845196e+1$	$2.849888e-3$	$1.119811e-2$	$8.336762e-2$
28	$3.033695e-3$	$9.014065e+0$	$7.415187e+1$	$3.034916e-3$	$1.213686e-2$	$9.117302e-2$
30	$3.209582e-3$	$9.704626e+0$	$7.972875e+1$	$3.205863e-3$	$1.307713e-2$	$9.899571e-2$
t	$\Delta t = 0.001$			$\Delta t = 0.0001$		
	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3
2	$2.437879e-4$	$1.207595e-3$	$3.504353e-5$	$2.435810e-4$	$1.207854e-3$	$3.664807e-5$
4	$4.452157e-4$	$1.217976e-3$	$1.524732e-4$	$4.447766e-4$	$1.218615e-3$	$1.566841e-4$
6	$6.801472e-4$	$1.255313e-3$	$6.050959e-4$	$6.794753e-4$	$1.256336e-3$	$6.119545e-4$
8	$9.290205e-4$	$1.389182e-3$	$2.384968e-3$	$9.281158e-4$	$1.390607e-3$	$2.394637e-3$
10	$1.173587e-3$	$1.803802e-3$	$8.667647e-3$	$1.172449e-3$	$1.805708e-3$	$8.680795e-3$
12	$1.405249e-3$	$2.650933e-3$	$2.358198e-2$	$1.403879e-3$	$2.653600e-3$	$2.360087e-2$
14	$1.624723e-3$	$3.132137e-3$	$3.289607e-2$	$1.623120e-3$	$3.136056e-3$	$3.292437e-2$
16	$1.837308e-3$	$2.442041e-3$	$1.966656e-2$	$1.835472e-3$	$2.447115e-3$	$1.970356e-2$
18	$2.047459e-3$	$1.687585e-3$	$6.802524e-3$	$2.045391e-3$	$1.693334e-3$	$6.844563e-3$
20	$2.255947e-3$	$1.358397e-3$	$1.933469e-3$	$2.253645e-3$	$1.364602e-3$	$1.978774e-3$
22	$2.460535e-3$	$1.255715e-3$	$5.729967e-4$	$2.458000e-3$	$1.262318e-3$	$6.210657e-4$
24	$2.658652e-3$	$1.228133e-3$	$2.310107e-4$	$2.655885e-3$	$1.235119e-3$	$2.817210e-4$
26	$2.849587e-3$	$1.221438e-3$	$1.498869e-4$	$2.846588e-3$	$1.228804e-3$	$2.032044e-4$
28	$3.034595e-3$	$1.220137e-3$	$1.330219e-4$	$3.031362e-3$	$1.227882e-3$	$1.889441e-4$
30	$3.205509e-3$	$1.220224e-3$	$1.321978e-4$	$3.202044e-3$	$1.228347e-3$	$1.907184e-4$



Şekil 5.3 : Şema-2 ile bir soliter dalganın çeşitli zamanlarda yaklaşık (○) ve analitik çözümleri (—) : $c = 0.03$, $\Delta x = \Delta t = 0.1$

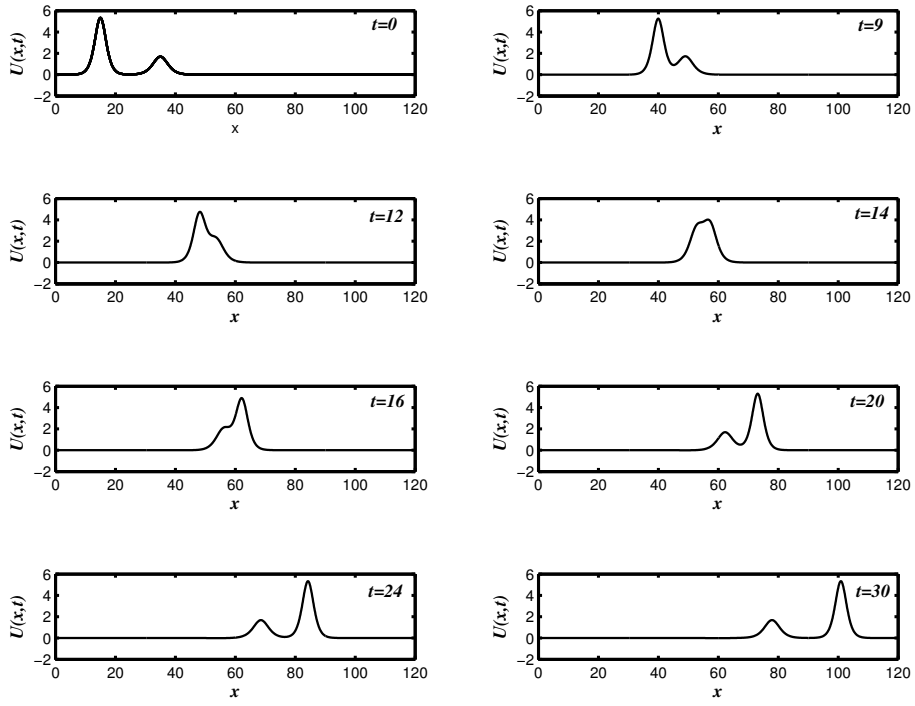
$\Delta x = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ adım uzunlukları için iki soliter dalganın Şema-1 ile sayısal çözümünün $[0, 30]$ zaman aralığındaki hareketi Şekil 5.5'te verildi. Şekil 5.5'ten $t = 9$ zamanında büyük genlikli dalganın küçük genlikli dalgaya yetiştiği ve dalgaların birbirleri ile etkileşmeye başladığı görülmektedir. $t = 14$ zamanında dalgalar tek bir dalga gibi görülmektedir. $t = 16$ zamanında büyük genlikli dalganın küçük genlikli dalgadan ayrılarak öne geçmeye başladığı, $t = 20$ zamanında büyük genlikli dalganın küçük genlikli dalganın önüne geçtiği ve daha sonra birbirlerinden tamamen ayrılarak ilerledikleri görülmektedir. $t = 30$ zamanında büyük genlikli dalganın $x_1 = 101$ konumunda $3c_1 = 5.3319539512$ genliğine ve $v_1 = 2.8666666667$ hızına; küçük genlikli dalganın $x_2 = 78$ konumunda $3c_2 = 1.6833351453$ genliğine ve $v_2 = 1.4333333333$ hızına sahiptir. Bu durumda dalgaların tamamen birbirlerinden ayrıldıktan sonra genliklerini ve hızlarını hemen hemen koruyarak sağa doğru hareket ettiklerini göstermektedir.



Şekil 5.4 : Şema-2 ile bir soliter dalğanın $t = 20$ zamanında mutlak hata grafiği : $c = 0.03$, $\Delta x = \Delta t = 0.1$

5.3 Şema-3

RLW denkleminin üç adım Adams-Bashforth yöntemi ile zamana göre ayrıklaştırılmış formu olan (5.0.2) denkleminde konum değişkenine göre türevler yerine (2.1.18) ve (2.1.21) denklemleri ile verilen $O((\Delta x)^4)$ hata mertebesine sahip beş nokta merkezi sonlu farklar



Şekil 5.5 : Şema-2 ile iki soliter dalganın çeşitli zamanlarda yaklaşık çözümleri : $\Delta x = 0.1$, $\Delta t = 0.01$

yaklaşımları yazılırsa

$$\begin{aligned}
& W_j^{n+1} - \mu \frac{-W_{j-2}^{n+1} + 16W_{j-1}^{n+1} - 30W_j^{n+1} + 16W_{j+1}^{n+1} - W_{j+2}^{n+1}}{12(\Delta x)^2} = \\
& W_j^n - \mu \frac{-W_{j-2}^n + 16W_{j-1}^n - 30W_j^n + 16W_{j+1}^n - W_{j+2}^n}{12(\Delta x)^2} \\
& + \frac{23\Delta t}{12} \left(-\frac{W_{j-2}^n - 8W_{j-1}^n + 8W_{j+1}^n - W_{j+2}^n}{12\Delta x} \right. \\
& \left. - \varepsilon W_j^n \frac{W_{j-2}^n - 8W_{j-1}^n + 8W_{j+1}^n - W_{j+2}^n}{12\Delta x} \right) \\
& - \frac{16\Delta t}{12} \left(-\frac{W_{j-2}^{n-1} - 8W_{j-1}^{n-1} + 8W_{j+1}^{n-1} - W_{j+2}^{n-1}}{12\Delta x} \right. \\
& \left. - \varepsilon W_j^{n-1} \frac{W_{j-2}^{n-1} - 8W_{j-1}^{n-1} + 8W_{j+1}^{n-1} - W_{j+2}^{n-1}}{12\Delta x} \right) \\
& + \frac{5\Delta t}{12} \left(-\frac{W_{j-2}^{n-2} - 8W_{j-1}^{n-2} + 8W_{j+1}^{n-2} - W_{j+2}^{n-2}}{12\Delta x} \right. \\
& \left. - \varepsilon W_j^{n-2} \frac{W_{j-2}^{n-2} - 8W_{j-1}^{n-2} + 8W_{j+1}^{n-2} - W_{j+2}^{n-2}}{12\Delta x} \right) \quad (5.3.1)
\end{aligned}$$

elde edilir. (5.3.1) denklemi $n+1, n, n-1, n-2$ zaman seviyelerine göre düzenlenirse

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu}{12(\Delta x)^2} W_{j-2}^{n+1} - \frac{4\mu}{3(\Delta x)^2} W_{j-1}^{n+1} + \left(1 + \frac{5\mu}{2(\Delta x)^2} \right) W_j^{n+1} - \frac{4\mu}{3(\Delta x)^2} W_{j+1}^{n+1} + \frac{\mu}{12(\Delta x)^2} W_{j+2}^{n+1} = \\
& \left(\frac{\mu}{12(\Delta x)^2} - \frac{23\Delta t}{144\Delta x} - \frac{23\varepsilon\Delta t}{144\Delta x} W_j^n \right) W_{j-2}^n - \left(\frac{4\mu}{3(\Delta x)^2} - \frac{23\Delta t}{18\Delta x} - \frac{23\varepsilon\Delta t}{18\Delta x} W_j^n \right) W_{j-1}^n \\
& + \left(1 + \frac{5\mu}{2(\Delta x)^2} \right) W_j^n - \left(\frac{4\mu}{3(\Delta x)^2} + \frac{23\Delta t}{18\Delta x} + \frac{23\varepsilon\Delta t}{18\Delta x} W_j^n \right) W_{j+1}^n \\
& + \left(\frac{\mu}{12(\Delta x)^2} + \frac{23\Delta t}{144\Delta x} + \frac{23\varepsilon\Delta t}{144\Delta x} W_j^n \right) W_{j+2}^n + \left(\frac{\Delta t}{9\Delta x} + \frac{\varepsilon\Delta t}{9\Delta x} W_j^{n-1} \right) W_{j-2}^{n-1} \\
& - \left(\frac{8\Delta t}{9\Delta x} + \frac{8\varepsilon\Delta t}{9\Delta x} W_j^{n-1} \right) W_{j-1}^{n-1} + \left(\frac{8\Delta t}{9\Delta x} + \frac{8\varepsilon\Delta t}{9\Delta x} W_j^{n-1} \right) W_{j+1}^{n-1} \\
& - \left(\frac{\Delta t}{9\Delta x} + \frac{\varepsilon\Delta t}{9\Delta x} W_j^{n-1} \right) W_{j+2}^{n-1} - \left(\frac{5\Delta t}{144\Delta x} + \frac{5\varepsilon\Delta t}{144\Delta x} W_j^{n-2} \right) W_{j-2}^{n-2} \\
& + \left(\frac{5\Delta t}{18\Delta x} + \frac{5\varepsilon\Delta t}{18\Delta x} W_j^{n-2} \right) W_{j-1}^{n-2} - \left(\frac{5\Delta t}{18\Delta x} + \frac{5\varepsilon\Delta t}{18\Delta x} W_j^{n-2} \right) W_{j+1}^{n-2} \\
& + \left(\frac{5\Delta t}{144\Delta x} + \frac{5\varepsilon\Delta t}{144\Delta x} W_j^{n-2} \right) W_{j+2}^{n-2},
\end{aligned}$$

elde edilir. Katsayıları

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{\mu}{12(\Delta x)^2}, & B_1 &= \frac{\mu}{12(\Delta x)^2} - \frac{23\Delta t}{144\Delta x} - \frac{23\varepsilon\Delta t}{144\Delta x} W_j^n, \\
A_2 &= -\frac{4\mu}{3(\Delta x)^2}, & B_2 &= -\frac{4\mu}{3(\Delta x)^2} + \frac{23\Delta t}{18\Delta x} + \frac{23\varepsilon\Delta t}{18\Delta x} W_j^n, \\
A_3 &= 1 + \frac{5\mu}{2(\Delta x)^2}, & B_3 &= 1 + \frac{5\mu}{2(\Delta x)^2}, \\
A_4 &= -\frac{4\mu}{3(\Delta x)^2}, & B_4 &= -\frac{4\mu}{3(\Delta x)^2} - \frac{23\Delta t}{18\Delta x} - \frac{23\varepsilon\Delta t}{18\Delta x} W_j^n, \\
A_5 &= \frac{\mu}{12(\Delta x)^2}, & B_5 &= \frac{\mu}{12(\Delta x)^2} + \frac{23\Delta t}{144\Delta x} + \frac{23\varepsilon\Delta t}{144\Delta x} W_j^n, \\
C_1 &= \frac{\Delta t}{9\Delta x} + \frac{\varepsilon\Delta t}{9\Delta x} W_j^{n-1}, & D_1 &= -\frac{5\Delta t}{144\Delta x} - \frac{5\varepsilon\Delta t}{144\Delta x} W_j^{n-2}, \\
C_2 &= -\frac{8\Delta t}{9\Delta x} - \frac{8\varepsilon\Delta t}{9\Delta x} W_j^{n-1}, & D_2 &= \frac{5\Delta t}{18\Delta x} + \frac{5\varepsilon\Delta t}{18\Delta x} W_j^{n-2}, \\
C_4 &= \frac{8\Delta t}{9\Delta x} + \frac{8\varepsilon\Delta t}{9\Delta x} W_j^{n-1}, & D_4 &= -\frac{5\Delta t}{18\Delta x} - \frac{5\varepsilon\Delta t}{18\Delta x} W_j^{n-2}, \\
C_5 &= -\frac{\Delta t}{9\Delta x} - \frac{\varepsilon\Delta t}{9\Delta x} W_j^{n-1}, & D_5 &= \frac{5\Delta t}{144\Delta x} + \frac{5\varepsilon\Delta t}{144\Delta x} W_j^{n-2}
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
&A_1 W_{j-2}^{n+1} + A_2 W_{j-1}^{n+1} + A_3 W_j^{n+1} + A_4 W_{j+1}^{n+1} + A_5 W_{j+2}^{n+1} = \\
&B_1 W_{j-2}^n + B_2 W_{j-1}^n + B_3 W_j^n + B_4 W_{j+1}^n + B_5 W_{j+2}^n \\
&+ C_1 W_{j-2}^{n-1} + C_2 W_{j-1}^{n-1} + C_3 W_j^{n-1} + C_4 W_{j+1}^{n-1} + C_5 W_{j+2}^{n-1} \\
&+ D_1 W_{j-2}^{n-2} + D_2 W_{j-1}^{n-2} + D_3 W_j^{n-2} + D_4 W_{j+1}^{n-2} + D_5 W_{j+2}^{n-2} \\
&j = 1, 2, \dots, M-1 \text{ ve } n = 2, 3, \dots, N-1 \text{ için}
\end{aligned} \tag{5.3.2}$$

şeklinde bilinmeyenleri $W_{-1}^{n+1}, W_0^{n+1}, W_1^{n+1}, \dots, W_M^{n+1}, W_{M+1}^{n+1}$ olan $M+3$ tane bilinmeyen ve $M-1$ tane denklemden oluşan bir lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözülebilir olması için bilinmeyen sayısı denklem sayısına eşit olmalıdır. Buna göre W_{-1}, W_0, W_M ve W_{M+1} bilinmeyenleri (3.0.3) ile verilen sınır şartlarından

$$\begin{aligned}
U(x_0, t) &= 0 \Rightarrow W_0 = 0 \\
U(x_M, t) &= 0 \Rightarrow W_M = 0
\end{aligned}$$

ve

$$U_x(x_0, t) = 0 \Rightarrow \frac{W_1 - W_{-1}}{2\Delta x} = 0 \Rightarrow W_{-1} = W_1$$

$$U_x(x_M, t) = 0 \Rightarrow \frac{W_{M+1} - W_{M-1}}{2\Delta x} = 0 \Rightarrow W_{M+1} = W_{M-1}$$

olarak elde edilir. W_{-1}, W_0, W_M ve W_{M+1} bilinmeyenleri (5.3.2) denkleminde yerlerine yazılırsa $M-1$ bilinmeyen ve $M-1$ denklemden oluşan bir lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir.

Bu denklem sistemi matris formunda

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_1 + A_3 & A_4 & A_5 & & & & \\ A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & & & \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ & & & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ & & & & A_1 & A_2 & A_3 + A_5 \end{bmatrix}, \mathcal{C} = \begin{bmatrix} C_1 & C_4 & C_5 & & & & \\ C_2 & 0 & C_4 & C_5 & & & \\ C_1 & C_2 & 0 & C_4 & C_5 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & C_1 & C_2 & 0 & C_4 & C_5 \\ & & & C_1 & C_2 & 0 & C_4 \\ & & & & C_1 & C_2 & C_5 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} B_1 + B_3 & B_4 & B_5 & & & & \\ B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & & & \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \\ & & & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ & & & & B_1 & B_2 & B_3 + B_5 \end{bmatrix}, \mathcal{D} = \begin{bmatrix} D_1 & D_4 & D_5 & & & & \\ D_2 & 0 & D_4 & D_5 & & & \\ D_1 & D_2 & 0 & D_4 & D_5 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & D_1 & D_2 & 0 & D_4 & D_5 \\ & & & D_1 & D_2 & 0 & D_4 \\ & & & & D_1 & D_2 & D_5 \end{bmatrix}$$

ve

$$\mathbf{W} = [W_1 \quad W_2 \quad \cdots \quad W_{M-1}]^T$$

olmak üzere

$$\mathcal{A}\mathbf{W}^{n+1} = \mathcal{B}\mathbf{W}^n + \mathcal{C}\mathbf{W}^{n-1} + \mathcal{D}\mathbf{W}^{n-2}, n = 2, 3, \dots, N-1 \quad (5.3.3)$$

şeklinde yazılır. $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ matrislerinin boyutu $(M-1) \times (M-1)$ olup $\mathbf{W}$ matrisinin boyutu $(M-1) \times 1$ dir. (5.3.3) denklemi $n = 2$ için

$$\mathcal{A}\mathbf{W}^3 = \mathcal{B}\mathbf{W}^2 + \mathcal{C}\mathbf{W}^1 + \mathcal{D}\mathbf{W}^0$$

olduğundan $\mathbf{W}^3$ matrisini hesaplayabilmek için $\mathbf{W}^0, \mathbf{W}^1$ ve $\mathbf{W}^2$ matrislerinin bilinmesi gerekir. (3.0.2) denklemi ile verilen başlangıç şartından

$$\mathbf{W}^0 = [f(x_1) \quad f(x_2) \quad \cdots \quad f(x_{M-1})]^T$$

olarak, $\mathbf{W}^1$ ve $\mathbf{W}^2$ matrisleri ise herhangi bir tek adım yönteminden veya analitik çözümü bilinen problemler için analitik çözümden hesaplanır. Daha sonra istenen zaman adımına kadar (5.3.3) denkleminde işlemler ardışık olarak tekrarlanır.

5.4 Şema-3'ün Test Problemlerine Uygulanması

Bu kısımda (5.3.3) denklemi ile verilen şema bir soliter dalga ve iki soliter dalga problemlerine uygulanarak sayısal sonuçlar elde edildi.

Çizelge 5.21 : Şema-3 ile bir soliter dalganın $c = 0.1$ için korunum sabitleri ve hata normları : $\Delta t = 0.1, \Delta x = 0.1, 0.05, 0.025$

Δx	t	I_1	I_2	I_3	L_2	L_∞
0.1	5	3.9799497485	0.8104537848	2.5789890303	$1.2884768571e-5$	$6.1482021209e-6$
	10	3.9799497486	0.8104479758	2.5789698592	$2.5203672007e-5$	$1.1160351017e-5$
	15	3.9799497487	0.8104421671	2.5789506896	$3.6007881023e-5$	$1.5038819911e-5$
	20	3.9799497488	0.8104363586	2.5789315210	$4.5410835716e-5$	$1.8201029486e-5$
0.05	5	3.9799497485	0.8104561334	2.5789890302	$1.2886657681e-5$	$6.1501884611e-6$
	10	3.9799497486	0.8104503242	2.5789698591	$2.5206919583e-5$	$1.1165360748e-5$
	15	3.9799497487	0.8104445153	2.5789506895	$3.6011841636e-5$	$1.5047444745e-5$
	20	3.9799497488	0.8104387067	2.5789315208	$4.5414997849e-5$	$1.8205935836e-5$
0.025	5	3.9799497484	0.8104567207	2.5789890301	$1.2886781315e-5$	$6.1508481302e-6$
	10	3.9799497485	0.8104509113	2.5789698589	$2.5207133809e-5$	$1.1165585017e-5$
	15	3.9799497485	0.8104451024	2.5789506892	$3.6012105819e-5$	$1.5047711865e-5$
	20	3.9799497486	0.8104392937	2.5789315204	$4.5415279898e-5$	$1.8206259381e-5$
Analitik Çözüm		3.9799497484	0.8104624942	2.5790074370		

Çizelge 5.22 : Şema-3 ile bir soliter dalganın $c = 0.1$ için korunum sabitlerinin değişim miktarları : $\Delta t = 0.1, \Delta x = 0.1, 0.05, 0.025$

Δx	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3
0.1	$3.7745140347e-10$	$2.6135638554e-5$	$7.5916012423e-5$
0.05	$3.8945024983e-10$	$2.3787522802e-5$	$7.5916184036e-5$
0.025	$1.7617862724e-10$	$2.3200499618e-5$	$7.5916555537e-5$

5.4.1 Bir soliter dalganın hareketi

Bu kısımda $x_0 = 0$ olmak üzere sırasıyla $c = 0.1$ ve $c = 0.03$ için bir soliter dalganın hareketi $[-80, 120]$ konum ve $[0, 20]$ zaman aralıklarında Şema-3 ile çeşitli zaman ve konum adım uzunlukları için elde edilen sayısal sonuçların hata normları, korunum sabitleri ve korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları hesaplanarak çizelgeler halinde verildi, çeşitli grafikler çizildi.

Durum 1 : Bu durumda $c = 0.1$ olarak alındı. İlk olarak bir soliter dalganın hareketi $\Delta t = 0.1$ ve $\Delta x = 0.1, 0.05, 0.025$ adım uzunlukları için Şema-3 ile elde edilen sayısal sonuçların korunum sabitleri ve hata normları Çizelge 5.21’de ve $t = 20$ zamanında korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları Çizelge 5.22’de verildi. Çizelge 5.21’den $\Delta x \rightarrow 0$ için L_2 ve L_∞ hata normlarının $t = 5, 10, 15, 20$ zamanlarında hemen hemen aynı kaldığı ve korunum sabitlerinin analitik değerler ile uyumlu olduğu görüldü. Çizelge 5.22’den $\Delta x \rightarrow 0$ için kütle ve enerji korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarlarının hemen hemen aynı kaldığı, momentum korunum sabitinin mutlak değişim miktarının küçüldüğü ve sonuç olarak önerilen şemanın korunum sabitlerini özellikle kütle korunum sabitinin iyi bir şekilde koruduğu görüldü.

Daha sonra bir soliter dalganın hareketi $t = 5, 10, 15, 20$ zamanlarında $\Delta x = 0.1$ ve $\Delta t = 0.1, 0.05, 0.025$ adım uzunlukları için Şema-3 ile elde edilen sayısal sonuçların korunum sabitleri

Çizelge 5.23 : Şema-3 ile bir soliter dalganın $c = 0.1$ için korunum sabitleri ve hata normları : $\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.1, 0.05, 0.025$

Δt	t	I_1	I_2	I_3	L_2	L_∞
0.1	5	3.9799497485	0.8104537848	2.5789890303	$1.2884768571e-5$	$6.1482021209e-6$
	10	3.9799497486	0.8104479758	2.5789698592	$2.5203672007e-5$	$1.1160351017e-5$
	15	3.9799497487	0.8104421671	2.5789506896	$3.6007881023e-5$	$1.5038819911e-5$
	20	3.9799497488	0.8104363586	2.5789315210	$4.5410835716e-5$	$1.8201029486e-5$
0.05	5	3.9799497485	0.8104586499	2.5790050863	$1.6434527777e-6$	$7.8268502590e-7$
	10	3.9799497486	0.8104579231	2.5790026877	$3.1812291716e-6$	$1.4053575334e-6$
	15	3.9799497487	0.8104571963	2.5790002892	$4.5301796034e-6$	$1.8884829060e-6$
	20	3.9799497488	0.8104564695	2.5789978906	$5.7049118907e-6$	$2.2823396964e-6$
0.025	5	3.9799497485	0.8104592722	2.5790071401	$2.1028877845e-7$	$9.9215990312e-8$
	10	3.9799497486	0.8104591813	2.5790068402	$4.0511689413e-7$	$1.7708748329e-7$
	15	3.9799497487	0.8104590905	2.5790065403	$5.7613988090e-7$	$2.3759661150e-7$
	20	3.9799497488	0.8104589996	2.5790062404	$7.2523095486e-7$	$2.8697907117e-7$
Analitik Çözüm		3.9799497484	0.8104624942	2.5790074370		

Çizelge 5.24 : Şema-3 ile bir soliter dalganın $c = 0.1$ için korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.1, 0.05, 0.025$

Δt	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3
0.1	$3.7745140347e-10$	$2.6135638554e-5$	$7.5916012423e-5$
0.05	$3.9001157859e-10$	$6.0247559561e-6$	$9.5463707068e-6$
0.025	$3.9348746483e-10$	$3.4946301243e-6$	$1.1965633067e-6$

ve hata normları Çizelge 5.23'te ve $t = 20$ zamanında korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları Çizelge 5.24'te verildi. Çizelge 5.23'ten $\Delta t \rightarrow 0$ için $L_2 \rightarrow 0$, $L_\infty \rightarrow 0$ olduğu ve korunum sabitlerinin analitik değerler ile uyumlu olduğu görüldü. Çizelge 5.24'ten kütle korunum sabitinin mutlak değişim miktarının hemen hemen aynı kaldığı, momentum ve enerji korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarlarının küçüldüğü ve sonuçta korunum sabitlerinin özellikle kütle korunum sabitinin iyi bir şekilde korunduğu görüldü.

Daha sonra bir soliter dalganın hareketi $t = 5, 10, 15, 20$ zamanlarında $\Delta x = \Delta t = 0.1, 0.05, 0.025$ adım uzunlukları için Şema-3 ile elde edilen sayısal sonuçların korunum sabitleri ve hata normları Çizelge 5.25'te ve $t = 20$ zamanında korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları Çizelge 5.26'da verildi. Çizelge 5.25'ten zaman ilerledikçe hata normlarının arttığı ancak $\Delta x \rightarrow 0$ ve $\Delta t \rightarrow 0$ için $L_2 \rightarrow 0$, $L_\infty \rightarrow 0$ olduğu ve korunum sabitlerinin analitik değerleri ile uyumlu olduğu görüldü. Çizelge 5.26'dan kütle korunum sabitinin mutlak değişim miktarının hemen hemen aynı kaldığı, momentum ve enerji korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarlarının küçüldüğü ve sonuç olarak önerilen şemanın korunum sabitlerini iyi bir şekilde koruduğu özellikle de kütle korunum sabitini koruduğu görüldü.

Son olarak bir soliter dalganın hareketi $t = 20$ zamanında $\Delta x = 0.4, 0.2, 0.1$ ve $\Delta t = 0.2, 0.1, 0.05$ adım uzunlukları için Şema-3 ile elde edilen sayısal sonuçların korunum sabitleri ve hata normları Çizelge 5.27'de verildi. Çizelge 5.27'den $\Delta x \rightarrow 0$ ve $\Delta t \rightarrow 0$ için L_2 ve L_∞

Çizelge 5.25 : Şema-3 ile bir soliter dalganın $c = 0.1$ için korunum sabitleri ve hata normları : $\Delta t = \Delta x = 0.1, 0.05, 0.025$

$\Delta x = \Delta t$	t	I_1	I_2	I_3	L_2	L_∞
0.1	5	3.9799497485	0.8104537848	2.5789890303	$1.2884768571e-5$	$6.1482021209e-6$
	10	3.9799497486	0.8104479758	2.5789698592	$2.5203672006e-5$	$1.1160351019e-5$
	15	3.9799497487	0.8104421671	2.5789506896	$3.6007881007e-5$	$1.5038819898e-5$
	20	3.9799497488	0.8104363586	2.5789315210	$4.5410835711e-5$	$1.8201029486e-5$
0.05	5	3.9799497484	0.8104609988	2.5790050863	$1.6439831618e-6$	$7.8372853723e-7$
	10	3.9799497486	0.8104602719	2.5790026876	$3.1819065430e-6$	$1.4079361150e-6$
	15	3.9799497487	0.8104595451	2.5790002890	$4.5306319619e-6$	$1.8915192613e-6$
	20	3.9799497487	0.8104588182	2.5789978903	$5.7048447047e-6$	$2.2852001297e-6$
0.025	5	3.9799497481	0.8104622083	2.5790071396	$2.0758449776e-7$	$9.8939784754e-8$
	10	3.9799497479	0.8104621173	2.5790068392	$3.9969632660e-7$	$1.7681944886e-7$
	15	3.9799497477	0.8104620263	2.5790065388	$5.6817030015e-7$	$2.3717965442e-7$
	20	3.9799497475	0.8104619352	2.5790062384	$7.1487436499e-7$	$2.8635102700e-7$
Analitik		3.9799497484	0.8104624942	2.5790074370		

Çizelge 5.26 : Şema-3 ile bir soliter dalganın $c = 0.1$ için korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta t = \Delta x = 0.1, 0.05, 0.025$

$\Delta x = \Delta t$	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3
0.1	$3.7745140347e-10$	$2.6135638554e-5$	$7.5916012423e-5$
0.05	$3.0702285159e-10$	$3.6759969886e-6$	$9.5466379268e-6$
0.025	$9.4152330377e-10$	$5.5898869500e-7$	$1.1985773907e-6$

hata normlarının yeterince küçük ve korunum sabitlerinin analitik değerleri ile uyumlu olduğu görüldü.

Bir soliter dalganın hareketi $t = 5, 10, 15, 20$ zamanlarında $\Delta t = 0.1$ ve $\Delta x = 0.1$ adım uzunlukları için Şema-3 ile elde edilen sayısal çözümü ile analitik çözümünün grafikleri Şekil 5.6'da ve $t = 20$ zamanında mutlak hatanın grafiği Şekil 5.7'te verildi. Şekil 5.6'dan sayısal çözüm ile analitik çözümün grafiklerinin çakıştığı ve $t = 0$ zamanında $x = 0$ konumunda dalganın genliği $3c = 0.3$ iken $t = 5, 10, 15, 20$ zamanlarında dalganın genliği sırasıyla $x = 5.6, 11.1, 16.6, 22.1$ konumlarında $3c = 0.2999943195, 0.2999905206, 0.2999878758, 0.2999857754$ olarak elde edilir. Böylece $[0, 20]$ zaman aralığında dalganın genliğinin başlangıç zamanındaki genliği ile uyumlu olduğu görüldü. Şekil 5.7'den Şema-3'ün mutlak hatasının en büyük değerinin konum aralığının ortalarında ve Çizelge 4.1 ile uyumlu olduğu görüldü.

Durum 2: Bu durumda $c = 0.03$ olarak alındı. İlk olarak bir soliter dalganın hareketi $t = 5, 10, 15, 20$ zamanlarında $\Delta t = 0.1$ ve $\Delta x = 0.1, 0.05, 0.025$ adım uzunlukları için Şema-3 ile elde edilen sayısal sonuçların korunum sabitleri ve hata normları Çizelge 5.28'de ve $t = 20$ zamanında korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları Çizelge 5.29'da verildi. Çizelge 5.28'den $\Delta x \rightarrow 0$ için L_2 ve L_∞ hata normlarının yeterince küçük kaldığı görüldü. Çizelge 5.29'dan kütle ve enerji korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarlarının hemen hemen aynı

Çizelge 5.27 : Şema-3 ile bir soliter dalganın $c = 0.1$ için korunum sabitleri ve hata normları : $\Delta x = 0.4, 0.2, 0.1$ ve $\Delta t = 0.2, 0.1, 0.05$

Δx	Δt	I_1	I_2	I_3	L_2	L_∞
0.4	0.2	3.9799497485	0.8102312701	2.5784088664	$3.5774131644e-4$	$1.4250842029e-4$
	0.1	3.9799497485	0.8103895313	2.5789315305	$5.3683398432e-5$	$2.0276596872e-5$
	0.05	3.9799497485	0.8104096259	2.5789978904	$3.1013665886e-5$	$1.2407549480e-5$
0.2	0.2	3.9799497486	0.8102686085	2.5784087838	$3.5919742751e-4$	$1.4403889663e-4$
	0.1	3.9799497487	0.8104269722	2.5789315216	$4.5381833702e-5$	$1.8122585971e-5$
	0.05	3.9799497487	0.8104470802	2.5789978907	$5.9991926562e-6$	$2.3401260146e-6$
0.1	0.2	3.9799497488	0.8102779733	2.5784087785	$3.5936283481e-4$	$1.4427159396e-4$
	0.1	3.9799497488	0.8104363586	2.5789315210	$4.5410835716e-5$	$1.8201029486e-5$
	0.05	3.9799497488	0.8104564695	2.5789978906	$5.7049118907e-6$	$2.2823396964e-6$
Analitik Çözüm		3.9799497484	0.8104624942	2.5790074370		

Çizelge 5.28 : Şema-3 ile bir soliter dalganın $c = 0.03$ için korunum sabitleri ve hata normları : $\Delta t = 0.1, \Delta x = 0.2, 0.1, 0.05$

Δx	t	I_1	I_2	I_3	L_2	L_∞
0.1	5	2.1094069195	0.1273016028	0.3888057905	$4.6430012507e-7$	$1.7583935899e-7$
	10	2.1094083938	0.1273015355	0.3888055824	$9.4880667900e-7$	$3.0938346450e-7$
	15	2.1094095676	0.1273014681	0.3888053743	$1.4010872773e-6$	$4.5761174400e-7$
	20	2.1094104417	0.1273014008	0.3888051661	$1.8213691749e-6$	$5.9770552560e-7$
0.05	5	2.1094070263	0.1273016412	0.3888057905	$4.8539906422e-7$	$1.9011880408e-7$
	10	2.1094087534	0.1273015738	0.3888055824	$1.0125490076e-6$	$3.0941689984e-7$
	15	2.1094103085	0.1273015065	0.3888053743	$1.5039587969e-6$	$4.5765860113e-7$
	20	2.1094116472	0.1273014391	0.3888051661	$1.9526155537e-6$	$5.9778454728e-7$
0.025	5	2.1094070823	0.1273016508	0.3888057905	$4.9795942165e-7$	$2.1097924153e-7$
	10	2.1094089498	0.1273015834	0.3888055824	$1.0522665802e-6$	$3.0942900817e-7$
	15	2.1094107309	0.1273015160	0.3888053742	$1.5730756320e-6$	$4.5766610919e-7$
	20	2.1094123665	0.1273014487	0.3888051661	$2.0484722259e-6$	$5.9779642989e-7$
Analitik Çözüm		2.1094074997	0.1273017186	0.3888059903		

kaldığı, momentum korunum sabitinin mutlak değişim miktarının küçüldüğü ve sonuç olarak önerilen şemanın korunum sabitlerini iyi bir şekilde koruduğu görüldü.

Daha sonra bir soliter dalganın hareketi $t = 5, 10, 15, 20$ zamanlarında $\Delta x = 0.1$ ve $\Delta t = 0.1, 0.05, 0.025$ adım uzunlukları için Şema-3 ile elde edilen sayısal sonuçların korunum sabitleri ve hata normları Çizelge 5.30'da ve $t = 20$ zamanında korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları Çizelge 5.31'de verildi. Çizelge 5.30'dan zaman ilerledikçe hata normlarının arttığı ancak $\Delta t \rightarrow 0$ için $L_2 \rightarrow 0$, $L_\infty \rightarrow 0$ olduğu ve korunum sabitlerinin analitik değerleri ile uyumlu olduğu görüldü. Çizelge 5.31'den kütle korunum sabitinin mutlak değişim miktarının hemen hemen aynı kaldığı, momentum ve enerji korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarlarının küçüldüğü ve sonuçta korunum sabitlerinin iyi bir şekilde korunduğu görüldü.

Daha sonra bir soliter dalganın hareketi $\Delta x = \Delta t = 0.1, 0.05, 0.025$ adım uzunlukları için Şema-3 ile elde edilen sayısal sonuçların korunum sabitleri ve hata normları Çizelge 5.32'de ve $t = 20$ zamanında korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları Çizelge 5.33'te verildi. Çizelge 5.32'den zaman ilerledikçe hata normlarının arttığı, $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$ için hata normlarının yeterince küçük ve korunum sabitlerinin analitik değerleri ile uyumlu olduğu

Çizelge 5.29 : Şema-3 ile bir soliter dalganın $c = 0.03$ için korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta t = 0.1, \Delta x = 0.2, 0.1, 0.05$

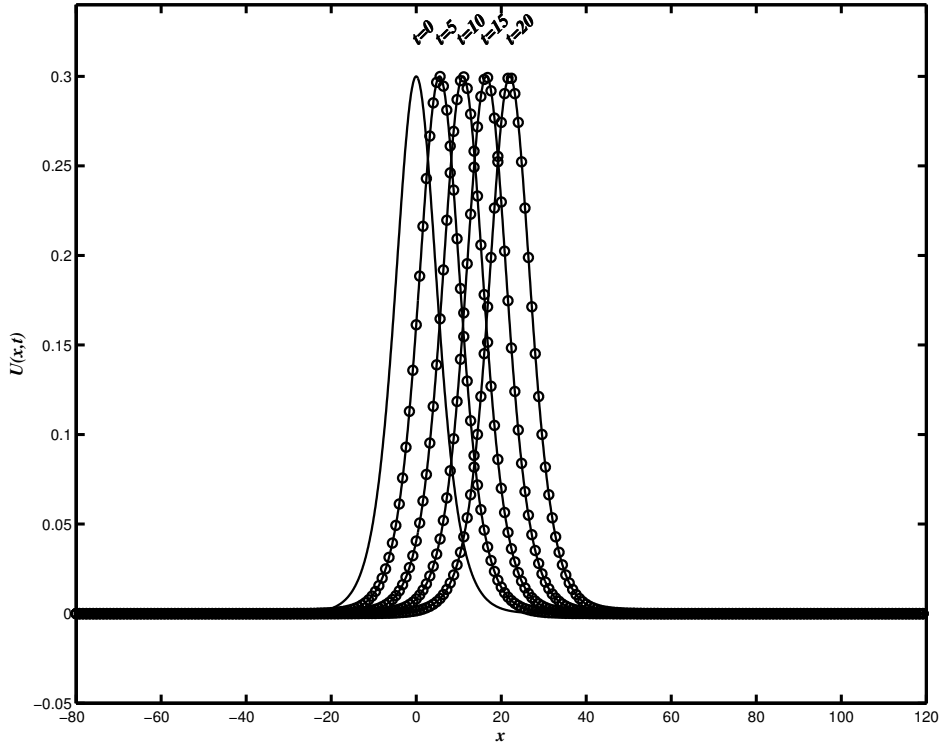
Δx	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3
0.1	$2.9419507199e-6$	$3.1785943511e-7$	$8.2421593023e-7$
0.05	$4.1474441699e-6$	$2.7952233253e-7$	$8.2423333125e-7$
0.025	$4.8667632719e-6$	$2.6995155414e-7$	$8.2428706311e-7$

Çizelge 5.30 : Şema-3 ile bir soliter dalganın $c = 0.03$ için korunum sabitleri ve hata normları : $\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.2, 0.1, 0.05$

Δt	t	I_1	I_2	I_3	L_2	L_∞
0.1	5	2.1094069195	0.1273016028	0.3888057905	$4.6430012507e-7$	$1.7583935899e-7$
	10	2.1094083938	0.1273015355	0.3888055824	$9.4880667900e-7$	$3.0938346450e-7$
	15	2.1094095676	0.1273014681	0.3888053743	$1.4010872773e-6$	$4.5761174400e-7$
	20	2.1094104417	0.1273014008	0.3888051661	$1.8213691749e-6$	$5.9770552560e-7$
0.05	5	2.1094069424	0.1273016592	0.3888059649	$2.2899625358e-7$	$1.7583935899e-7$
	10	2.1094084373	0.1273016508	0.3888059388	$4.6878692322e-7$	$2.0114161803e-7$
	15	2.1094096263	0.1273016424	0.3888059128	$6.4611608175e-7$	$2.1230002773e-7$
	20	2.1094105123	0.1273016340	0.3888058868	$7.5927356651e-7$	$2.1702441327e-7$
0.025	5	2.1094069542	0.1273016665	0.3888059871	$2.2726158184e-7$	$1.7583935899e-7$
	10	2.1094084595	0.1273016654	0.3888059839	$4.6303754026e-7$	$2.0310078497e-7$
	15	2.1094096561	0.1273016644	0.3888059806	$6.3351598466e-7$	$2.1425039806e-7$
	20	2.1094105481	0.1273016633	0.3888059774	$7.3725695225e-7$	$2.1897464373e-7$
Analitik Çözüm		2.1094074997	0.1273017186	0.3888059903		

Çizelge 5.31 : Şema-3 ile bir soliter dalganın $c = 0.03$ için korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.2, 0.1, 0.05$

Δt	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3
0.2	$2.8051207308e-6$	$2.1614106025e-6$	$6.5208629040e-6$
0.1	$2.9419507199e-6$	$3.1785943511e-7$	$8.2421593023e-7$
0.05	$3.0125118240e-6$	$8.4642265114e-8$	$1.0356856056e-7$



Şekil 5.6 : Şema-3 ile bir soliter dalganın çeşitli zamanlarda yaklaşık (○) ve analitik çözümleri (—) : $c = 0.1$, $\Delta x = \Delta t = 0.1$

görüldü. Çizelge 5.33'ten kütle korunum sabitinin mutlak değişim miktarının hemen hemen aynı kaldığı, momentum ve enerji korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarlarının küçüldüğü ve sonuçta korunum sabitlerinin iyi bir şekilde korunduğu görüldü.

Son olarak $t = 20$ zamanında bir soliter dalganın hareketi $\Delta x = 0.4, 0.2, 0.1$ ve $\Delta t = 0.2, 0.1, 0.05$ adım uzunlukları için Şema-3 ile elde edilen sayısal sonuçların korunum sabitleri ve hata normları Çizelge 5.34'te verildi. Çizelge 5.34'ten $\Delta t \rightarrow 0$ için hata normlarının küçüldüğü, $\Delta x \rightarrow 0$ için hata normlarının yeterince küçük ve korunum sabitlerinin analitik değerleri ile uyumlu olduğu görüldü.

Bir soliter dalganın hareketi $t = 5, 10, 15, 20$ zamanlarında $\Delta t = 0.1$ ve $\Delta x = 0.1$ adım uzunlukları için Şema-3 ile elde edilen sayısal çözümün ve analitik çözümün grafikleri Şekil 5.8'de ve $t = 20$ zamanında mutlak hatanın grafiği Şekil 5.9'da verildi. Şekil 5.8'den sayısal çözüm ile analitik çözümün grafiklerinin çakıştığı ve $t = 0$ zamanında $x = 0$ konumunda dalganın genliği $3c = 0.09$ iken $t = 5, 10, 15, 20$ zamanlarında dalganın genliği sırasıyla $x = 5.3, 10.4, 15.6, 20.7$ konumlarında $3c = 0.0899982095, 0.0899996976, 0.0899979244, 0.0899994361$

Çizelge 5.32 : Şema-3 ile bir soliter dalganın $c = 0.03$ için korunum sabitleri ve hata normları : $\Delta x = \Delta t = 0.2, 0.1, 0.05$

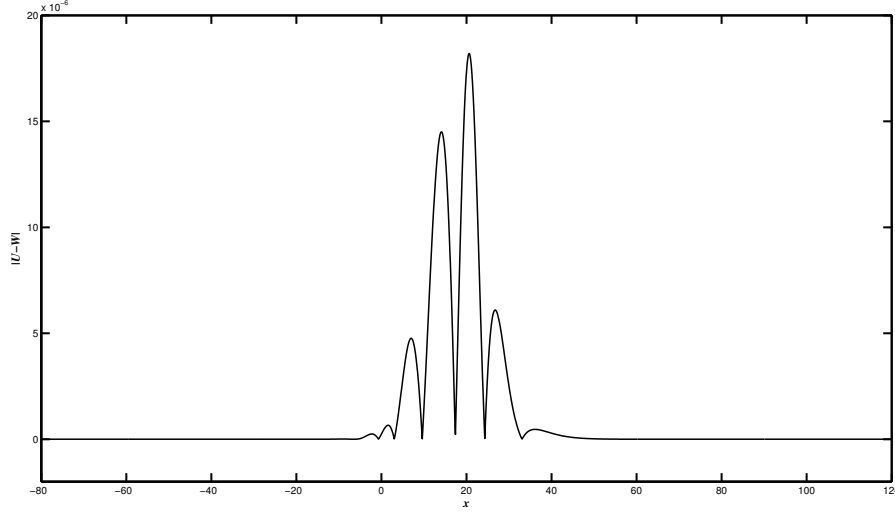
$\Delta x = \Delta t$	t	I_1	I_2	I_3	L_2	L_∞
0.1	5	2.1094069195	0.1273016028	0.3888057905	$4.6430012507e-7$	$1.7583935899e-7$
	10	2.1094083938	0.1273015355	0.3888055824	$9.4880667900e-7$	$3.0938346450e-7$
	15	2.1094095676	0.1273014681	0.3888053743	$1.4010872773e-6$	$4.5761174400e-7$
	20	2.1094104417	0.1273014008	0.3888051661	$1.8213691749e-6$	$5.9770552560e-7$
0.05	5	2.1094070547	0.1273016976	0.3888059648	$2.7276466280e-7$	$1.9592614042e-7$
	10	2.1094088099	0.1273016892	0.3888059388	$5.9351567347e-7$	$2.6374301980e-7$
	15	2.1094103890	0.1273016807	0.3888059128	$8.5484147846e-7$	$2.8301130428e-7$
	20	2.1094117492	0.1273016723	0.3888058867	$1.0456440697e-6$	$2.9271258894e-7$
0.025	5	2.1094071296	0.1273017144	0.3888059871	$2.9804061374e-7$	$2.2077816380e-7$
	10	2.1094090459	0.1273017133	0.3888059837	$6.6377011012e-7$	$3.0436796380e-7$
	15	2.1094108714	0.1273017122	0.3888059804	$9.7530231248e-7$	$3.2803161497e-7$
	20	2.1094125492	0.1273017111	0.3888059771	$1.2173271403e-6$	$3.4125245744e-7$
Analitik Çözüm		2.1094074997	0.1273017186	0.3888059903		

Çizelge 5.33 : Şema-3 ile bir soliter dalganın $c = 0.03$ için korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta x = \Delta t = 0.2, 0.1, 0.05$

Δt	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3
0.1	$2.9419507199e-6$	$3.1785943511e-7$	$8.2421593023e-7$
0.05	$4.2494605461e-6$	$4.6310002749e-8$	$1.0360541375e-7$
0.025	$5.0494995265e-6$	$7.4878624134e-9$	$1.3273900368e-8$

Çizelge 5.34 : Şema-3 ile bir soliter dalganın $c = 0.03$ için korunum sabitleri ve hata normları : $\Delta x = 0.4, 0.2, 0.1$ ve $\Delta t = 0.2, 0.1, 0.05$

Δx	Δt	I_1	I_2	I_3	L_2	L_∞
0.4	0.2	2.1094071299	0.1272987913	0.3887994695	$1.3237078964e-5$	$4.7162887564e-6$
	0.1	2.1094071209	0.1273006346	0.3888051661	$1.9063113631e-6$	$6.7320184763e-7$
	0.05	2.1094071164	0.1273008678	0.3888058868	$9.8168805022e-7$	$3.2431497647e-7$
0.2	0.2	2.1094087098	0.1272994039	0.3887994695	$1.3261286781e-5$	$4.7301134353e-6$
	0.1	2.1094087682	0.1273012474	0.3888051661	$1.7067318400e-6$	$5.9705616963e-7$
	0.05	2.1094087982	0.1273014806	0.3888058868	$4.0042701053e-7$	$1.0866676382e-7$
0.1	0.2	2.1094103049	0.1272995572	0.3887994695	$1.3278539248e-5$	$4.7329531754e-6$
	0.1	2.1094104417	0.1273014008	0.3888051661	$1.8213691749e-6$	$5.9770552560e-7$
	0.05	2.1094105123	0.1273016340	0.3888058868	$7.5927356651e-7$	$2.1702441327e-7$
Analitik Çözüm		2.1094074997	0.1273017186	0.3888059903		



Şekil 5.7 : Şema-3 ile bir soliter dalganın $t = 20$ zamanında mutlak hata grafiği : $c = 0.1$, $\Delta x = \Delta t = 0.1$

olarak elde edildi. Böylece $[0, 20]$ zaman aralığında dalganın genliğinin başlangıç zamanındaki genliği ile uyumlu olduğu ve $v = 1.035$ hızıyla sağa doğru şeklini koruyarak hareket ettiği görüldü. Şekil 5.9'dan Şema-3'ün mutlak hatasının en büyük değerinin konum aralığının ortalarında ve Çizelge 5.28 ile uyumlu olduğu görüldü.

5.4.2 İki soliter dalganın hareketi

Bu kısımda $k_1 = 0.4$, $k_2 = 0.3$, $x_1 = 15$, $x_2 = 35$ alınarak $[0, 120]$ konum aralığında iki soliter dalganın hareketi $t = 30$ zamanına kadar Şema-3 uygulanarak elde edilen sayısal sonuçların korunum sabitleri ve korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları hesaplanarak çizelgeler halinde verildi. Teorik olarak dalgaların başlangıç anındaki genlikleri $3c_1 = 5.3333$ ve $3c_2 = 1.6875$ olup hızları $v_1 = 2.7778$ ve $v_2 = 1.5625$ 'tir.

İlk olarak iki soliter dalganın hareketi $t = 2, 4, \dots, 30$ zamanlarında $\Delta x = 0.1$ ve $\Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$ adım uzunlukları için Şema-3 ile elde edilen sayısal sonuçların korunum sabitleri Çizelge 5.35'te, korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları Çizelge 5.36'da verildi. Çizelge 5.35 ve Çizelge 5.36'dan $\Delta t \rightarrow 0$ için korunum sabitlerinin analitik değerler ile oldukça uyumlu olduğu görüldü.

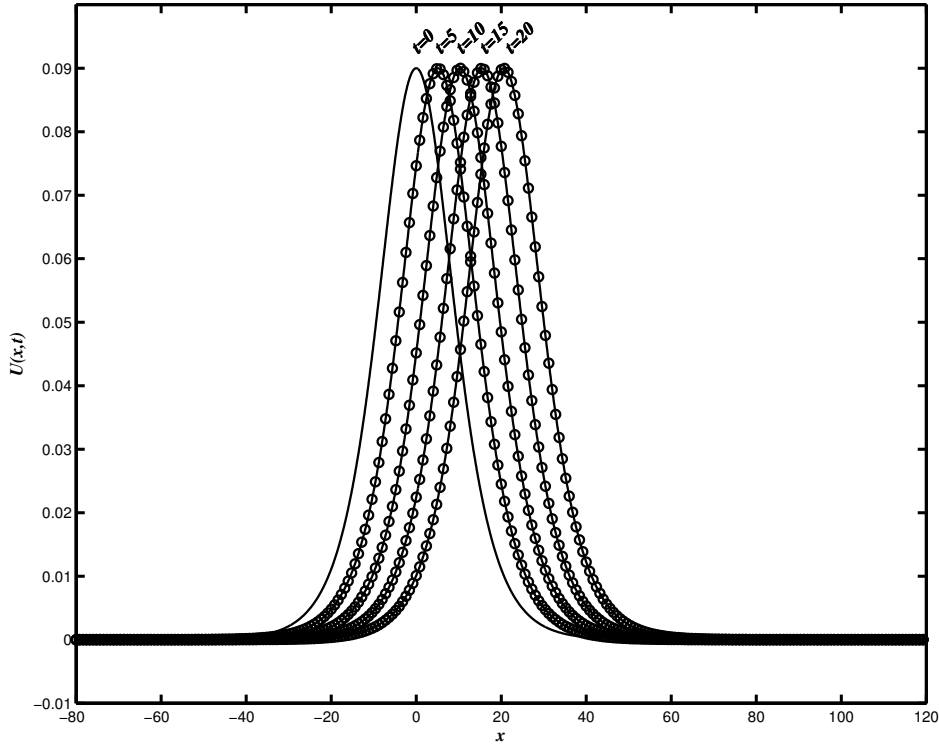
Daha sonra iki soliter dalganın hareketi $t = 2, 4, \dots, 30$ zamanlarında $\Delta x = 0.05$ ve $\Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$ adım uzunlukları için Şema-3 ile elde edilen sayısal sonuçların korunum sabitleri Çizelge 5.37'de, korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları Çizelge 5.38'de

Çizelge 5.35 : Şema-3 ile iki soliter dalganın korunum sabitleri: $\Delta x = 0.1$, $\Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$

t	$\Delta t = 0.1$			$\Delta t = 0.01$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
2	37.9168958706	119.7146205304	737.4842056345	37.9168981392	120.5030473741	744.0734634153
4	37.9170759074	118.8529575335	730.3289117613	37.9170797716	120.5021034551	744.0656321261
6	37.9172774288	118.0112762488	723.3656869518	37.9172831897	120.5011884284	744.0578280441
8	37.9174809061	117.1970558872	716.6673178549	37.9174881972	120.5005728332	744.0501401177
10	37.9176682614	116.4442100694	710.5341570260	37.9176771548	120.5018372735	744.0429386734
12	37.9178324282	115.8803079720	705.9733471023	37.9178428262	120.5087384051	744.0375095889
14	37.9179762048	115.6975941617	704.2930650279	37.9179874077	120.5141437839	744.0355787861
16	37.9181055437	115.5543880425	702.9009859143	37.9181173861	120.5062098281	744.0336973890
18	37.9182248883	115.0560541125	698.8471371432	37.9182380383	120.4994843243	744.0283423445
20	37.9183362670	114.3695390160	693.2823781342	37.9183507666	120.4970866803	744.0211709291
22	37.9184393694	113.6402136663	687.3509075880	37.9184539965	120.4959256203	744.0134929258
24	37.9185319034	112.9115402085	681.4262922786	37.9185459342	120.4949589226	744.0056932695
26	37.9186119048	112.1939797036	675.6028112217	37.9186266955	120.4940121824	743.9978651321
28	37.9186810215	111.4897534223	669.9007149035	37.9186982748	120.4930663917	743.9900304009
30	37.9187402797	110.7990766276	664.3217802812	37.9187529687	120.4921210027	743.9821942191
t	$\Delta t = 0.001$			$\Delta t = 0.0001$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
2	37.9168984313	120.5039763345	744.0812012029	37.9168984607	120.5039772441	744.0812090245
4	37.9170802627	120.5039727374	744.0811922690	37.9170803108	120.5039745975	744.0812078434
6	37.9172839007	120.5039947443	744.0811794420	37.9172839697	120.5039975394	744.0812027369
8	37.9174891191	120.5043022920	744.0811481554	37.9174892079	120.5043060003	744.0811790339
10	37.9176782632	120.5064275146	744.0810316125	37.9176783695	120.5064320710	744.0810694946
12	37.9178440937	120.5139448515	744.0806615420	37.9178442145	120.5139500170	744.0807043793
14	37.9179888089	120.5195129936	744.0803759268	37.9179889419	120.5195182992	744.0804203098
16	37.9181189033	120.5118231791	744.0807623351	37.9181190465	120.5118287182	744.0808089400
18	37.9182396623	120.5057829410	744.0810489932	37.9182398147	120.5057891652	744.0811011923
20	37.9183524907	120.5042627194	744.0811242149	37.9183526516	120.5042698155	744.0811835992
22	37.9184558086	120.5040277158	744.0811354975	37.9184559770	120.5040357299	744.0812025042
24	37.9185478180	120.5039982688	744.0811320996	37.9185479922	120.5040072116	744.0812068353
26	37.9186286387	120.5039913639	744.0811253810	37.9186288173	120.5040012380	744.0812078705
28	37.9187002732	120.5039860088	744.0811178829	37.9187004556	120.5039968148	744.0812081327
30	37.9187550094	120.5039811907	744.0811101831	37.9187551954	120.5039929286	744.0812081941
Analitik Çözüm : $I_1 = 37.9166666667$, $I_2 = 120.5232340954$, $I_3 = 744.0812089579$						

Çizelge 5.36 : Şema-3 ile iki soliter dalgaının korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta x = 0.1$, $\Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$

t	$\Delta t = 0.1$			$\Delta t = 0.01$		
	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3
2	$2.292039e-4$	$8.086136e-1$	$6.597003e+0$	$2.314726e-4$	$2.018672e-2$	$7.745543e-3$
4	$4.092408e-4$	$1.670277e+0$	$1.375230e+1$	$4.131049e-4$	$2.113064e-2$	$1.557683e-2$
6	$6.107621e-4$	$2.511958e+0$	$2.071552e+1$	$6.165230e-4$	$2.204567e-2$	$2.338091e-2$
8	$8.142394e-4$	$3.326178e+0$	$2.741389e+1$	$8.215305e-4$	$2.266126e-2$	$3.106884e-2$
10	$1.001595e-3$	$4.079024e+0$	$3.354705e+1$	$1.010488e-3$	$2.139682e-2$	$3.827028e-2$
12	$1.165761e-3$	$4.642926e+0$	$3.810786e+1$	$1.176160e-3$	$1.449569e-2$	$4.369937e-2$
14	$1.309538e-3$	$4.825640e+0$	$3.978814e+1$	$1.320741e-3$	$9.090311e-3$	$4.563017e-2$
16	$1.438877e-3$	$4.968846e+0$	$4.118022e+1$	$1.450719e-3$	$1.702427e-2$	$4.751157e-2$
18	$1.558222e-3$	$5.467180e+0$	$4.523407e+1$	$1.571372e-3$	$2.374977e-2$	$5.286661e-2$
20	$1.669600e-3$	$6.153695e+0$	$5.079883e+1$	$1.684100e-3$	$2.614742e-2$	$6.003803e-2$
22	$1.772703e-3$	$6.883020e+0$	$5.673030e+1$	$1.787330e-3$	$2.730848e-2$	$6.771603e-2$
24	$1.865237e-3$	$7.611694e+0$	$6.265492e+1$	$1.879268e-3$	$2.827517e-2$	$7.551569e-2$
26	$1.945238e-3$	$8.329254e+0$	$6.847840e+1$	$1.960029e-3$	$2.922191e-2$	$8.334383e-2$
28	$2.014355e-3$	$9.033481e+0$	$7.418049e+1$	$2.031608e-3$	$3.016770e-2$	$9.117856e-2$
30	$2.073613e-3$	$9.724157e+0$	$7.975943e+1$	$2.086302e-3$	$3.111309e-2$	$9.901474e-2$
t	$\Delta t = 0.001$			$\Delta t = 0.0001$		
	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3
2	$2.317647e-4$	$1.925776e-2$	$7.754950e-6$	$2.317940e-4$	$1.925685e-2$	$6.666608e-8$
4	$4.135960e-4$	$1.926136e-2$	$1.668891e-5$	$4.136442e-4$	$1.925950e-2$	$1.114509e-6$
6	$6.172341e-4$	$1.923935e-2$	$2.951583e-5$	$6.173030e-4$	$1.923656e-2$	$6.220930e-6$
8	$8.224524e-4$	$1.893180e-2$	$6.080245e-5$	$8.225413e-4$	$1.892810e-2$	$2.992400e-5$
10	$1.011597e-3$	$1.680658e-2$	$1.773454e-4$	$1.011703e-3$	$1.680202e-2$	$1.394633e-4$
12	$1.177427e-3$	$9.289244e-3$	$5.474159e-4$	$1.177548e-3$	$9.284078e-3$	$5.045785e-4$
14	$1.322142e-3$	$3.721102e-3$	$8.330311e-4$	$1.322275e-3$	$3.715796e-3$	$7.886481e-4$
16	$1.452237e-3$	$1.141092e-2$	$4.466227e-4$	$1.452380e-3$	$1.140538e-2$	$4.000179e-4$
18	$1.572996e-3$	$1.745115e-2$	$1.599647e-4$	$1.573148e-3$	$1.744493e-2$	$1.077656e-4$
20	$1.685824e-3$	$1.897138e-2$	$8.474293e-5$	$1.685985e-3$	$1.896428e-2$	$2.535863e-5$
22	$1.789142e-3$	$1.920638e-2$	$7.346039e-5$	$1.789310e-3$	$1.919837e-2$	$6.453649e-6$
24	$1.881151e-3$	$1.923583e-2$	$7.685826e-5$	$1.881326e-3$	$1.922688e-2$	$2.122613e-6$
26	$1.961972e-3$	$1.924273e-2$	$8.357683e-5$	$1.962151e-3$	$1.923286e-2$	$1.087353e-6$
28	$2.033607e-3$	$1.924809e-2$	$9.107500e-5$	$2.033789e-3$	$1.923728e-2$	$8.251411e-7$
30	$2.088343e-3$	$1.925290e-2$	$9.877480e-5$	$2.088529e-3$	$1.924117e-2$	$7.638148e-7$



Şekil 5.8 : Şema-3 ile bir soliter dalganın çeşitli zamanlarda yaklaşık (○) ve analitik çözümleri (—) : $c = 0.03$, $\Delta x = \Delta t = 0.1$

verildi. Çizelge 5.37 ve Çizelge 5.38’den $\Delta t \rightarrow 0$ için korunum sabitlerinin analitik değerler ile oldukça uyumlu olduğu görüldü.

Son olarak iki soliter dalganın hareketi $t = 2, 4, \dots, 30$ zamanlarında $\Delta x = 0.025$ ve $\Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$ adım uzunlukları için Şema-3 ile elde edilen sayısal sonuçların korunum sabitleri Çizelge 5.39’da, korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları Çizelge 5.40’ta verildi. Çizelge 5.39 ve Çizelge 5.40’tan $\Delta t \rightarrow 0$ için korunum sabitlerinin analitik değerler ile oldukça uyumlu olduğu görüldü.

$\Delta x = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ adım uzunlukları için $t = 0$ başlangıç zamanında tepe noktası $x_1 = 15$ konumunda genliği $3c_1 = 5.3333$ ve tepe noktası $x_2 = 35$ konumunda genliği $3c_2 = 1.6875$ olan iki soliter dalganın Şema-3 ile sayısal çözümünün $[0, 30]$ zaman aralığındaki hareketi Şekil 5.10’da verildi. Şekil 5.10’dan $t = 9$ zamanında büyük genlikli dalganın küçük genlikli dalgaya yetiştiği ve dalgaların birbirleri ile etkileşmeye başladığı görülmektedir. $t = 14$ zamanında dalgalar tek bir dalga gibi görülmektedir. $t = 16$ zamanında büyük genlikli dalganın küçük genlikli dalgadan ayrılarak öne geçmeye başladığı, $t = 20$ zamanında büyük genlikli

Çizelge 5.37 : Şema-3 ile iki soliter dalgaının korunum sabitleri : $\Delta x = 0.05$, $\Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$

$\Delta t = 0.1$							$\Delta t = 0.01$		
t	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3			
2	37.9169063043	119.7284314888	737.4814762755	37.9169075066	120.5174839932	744.0734537186			
4	37.9171012905	118.8666434399	730.3257944731	37.9171033868	120.5165421395	744.0656231967			
6	37.9173259042	118.0247906071	723.3624142555	37.9173291478	120.5156098958	744.0578236078			
8	37.9175607491	117.2102017578	716.6640371009	37.9175648548	120.5147632333	744.0501576380			
10	37.9177870774	116.4557712132	710.5309059816	37.9177922536	120.5144351793	744.0430586197			
12	37.9179967093	115.8867821515	705.9704382186	37.9180029951	120.5157057610	744.0379715790			
14	37.9181912874	115.6997945767	704.2905553266	37.9181981125	120.5169403948	744.0363070045			
16	37.9183758668	115.5612758433	702.8980477903	37.9183831651	120.5147644301	744.0340612066			
18	37.9185542871	115.0673710006	698.8437311464	37.9185627754	120.5125628895	744.0284319270			
20	37.9187280803	114.3820488371	693.2787590975	37.9187378270	120.5113032242	744.0211829521			
22	37.9188963689	113.6528183887	687.3471720524	37.9189062067	120.5103172076	744.0134869122			
24	37.9190562191	112.9240356432	681.4224681333	37.9190655106	120.5093716035	744.0056828775			
26	37.9192050687	112.2063420051	675.5989087032	37.9192152304	120.5084291074	743.9978534464			
28	37.9193440861	111.5019842890	669.8967398586	37.9193568160	120.5074864156	743.9900181442			
30	37.9194739189	110.8111797236	664.3177373159	37.9194821981	120.5065437287	743.9821815761			
$\Delta t = 0.001$							$\Delta t = 0.0001$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3			
2	37.9169076560	120.5184148751	744.0812010740	37.9169075978	120.5184153870	744.0812055687			
4	37.9171036395	120.5184132438	744.0811927843	37.9171035045	120.5184141960	744.0812011409			
6	37.9173295192	120.5184180977	744.0811842983	37.9173293087	120.5184194860	744.0811964842			
8	37.9175653458	120.5184947038	744.0811747912	37.9175650600	120.5184965117	744.0811906576			
10	37.9177928567	120.5190273601	744.0811604834	37.9177924948	120.5190295185	744.0811794182			
12	37.9180036999	120.5209133075	744.0811322165	37.9180032607	120.5209155554	744.0811520890			
14	37.9181989089	120.5223109186	744.0811124123	37.9181983919	120.5223127896	744.0811297174			
16	37.9183840470	120.5203804201	744.0811340347	37.9183834545	120.5203820280	744.0811496260			
18	37.9185637407	120.5188641666	744.0811462874	37.9185630760	120.5188659941	744.0811638728			
20	37.9187388730	120.5184818435	744.0811438293	37.9187381373	120.5184840952	744.0811650922			
22	37.9189073276	120.5184219745	744.0811369593	37.9189065212	120.5184247035	744.0811623677			
24	37.9190666991	120.5184137674	744.0811290680	37.9190658215	120.5184169858	744.0811587331			
26	37.9192164821	120.5184112618	744.0811209421	37.9192155325	120.5184149725	744.0811548915			
28	37.9193581287	120.5184091600	744.0811127578	37.9193571068	120.5184133634	744.0811509952			
30	37.9194835578	120.5184071968	744.0811045560	37.9194824634	120.5184118934	744.0811470849			
Analitik Çözüm : $I_1 = 37.9166666667$, $I_2 = 120.5232340954$, $I_3 = 744.0812089579$									

Çizelge 5.38 : Şema-3 ile iki soliter dalganın korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları : $\Delta x = 0.05$, $\Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$

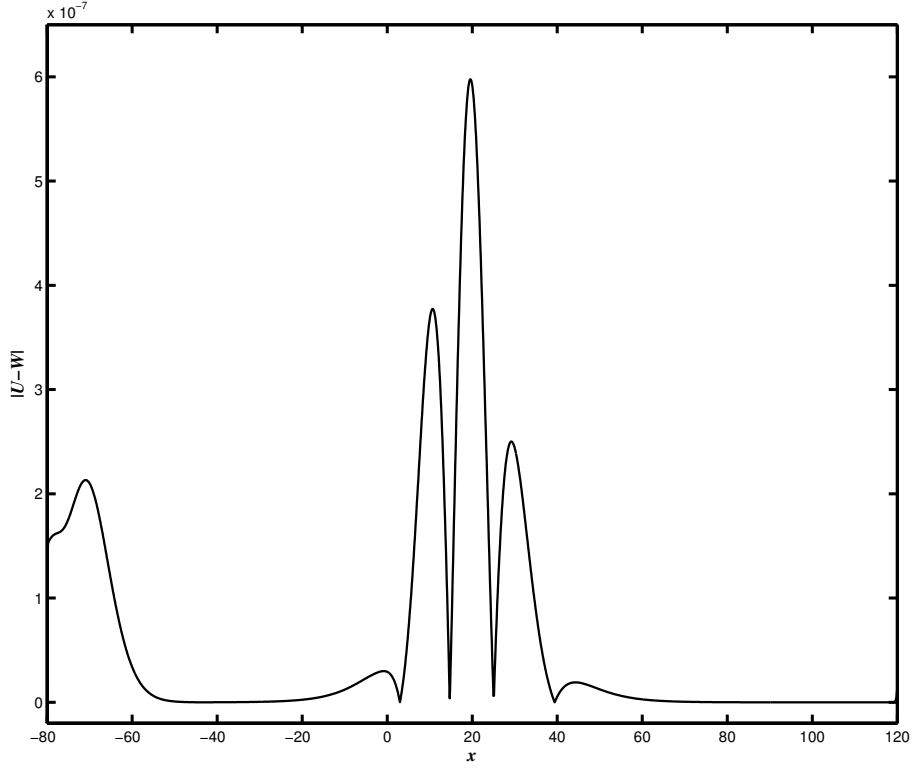
t	$\Delta t = 0.1$			$\Delta t = 0.01$		
	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3
2	$2.396376e-4$	$7.948026e-1$	$6.599733e+0$	$2.408399e-4$	$5.750102e-3$	$7.755239e-3$
4	$4.346238e-4$	$1.656591e+0$	$1.375541e+1$	$4.367201e-4$	$6.691956e-3$	$1.558576e-2$
6	$6.592376e-4$	$2.498443e+0$	$2.071879e+1$	$6.624812e-4$	$7.624200e-3$	$2.338535e-2$
8	$8.940825e-4$	$3.313032e+0$	$2.741717e+1$	$8.981882e-4$	$8.470862e-3$	$3.105132e-2$
10	$1.120411e-3$	$4.067463e+0$	$3.355030e+1$	$1.125587e-3$	$8.798916e-3$	$3.815034e-2$
12	$1.330043e-3$	$4.636452e+0$	$3.811077e+1$	$1.336328e-3$	$7.528334e-3$	$4.323738e-2$
14	$1.524621e-3$	$4.823440e+0$	$3.979065e+1$	$1.531446e-3$	$6.293701e-3$	$4.490195e-2$
16	$1.709200e-3$	$4.961958e+0$	$4.118316e+1$	$1.716499e-3$	$8.469665e-3$	$4.714775e-2$
18	$1.887620e-3$	$5.455863e+0$	$4.523748e+1$	$1.896109e-3$	$1.067121e-2$	$5.277703e-2$
20	$2.061414e-3$	$6.141185e+0$	$5.080245e+1$	$2.071160e-3$	$1.193087e-2$	$6.002601e-2$
22	$2.229702e-3$	$6.870416e+0$	$5.673404e+1$	$2.239540e-3$	$1.291689e-2$	$6.772205e-2$
24	$2.389552e-3$	$7.599198e+0$	$6.265874e+1$	$2.398844e-3$	$1.386249e-2$	$7.552608e-2$
26	$2.538402e-3$	$8.316892e+0$	$6.848230e+1$	$2.548564e-3$	$1.480499e-2$	$8.335551e-2$
28	$2.677419e-3$	$9.021250e+0$	$7.418447e+1$	$2.690149e-3$	$1.574768e-2$	$9.119081e-2$
30	$2.807252e-3$	$9.712054e+0$	$7.976347e+1$	$2.815531e-3$	$1.669037e-2$	$9.902738e-2$
t	$\Delta t = 0.001$			$\Delta t = 0.0001$		
	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3
2	$2.409894e-4$	$4.819220e-3$	$7.883861e-6$	$2.409311e-4$	$4.818708e-3$	$3.389135e-6$
4	$4.369728e-4$	$4.820852e-3$	$1.617355e-5$	$4.368378e-4$	$4.819899e-3$	$7.816944e-6$
6	$6.628526e-4$	$4.815998e-3$	$2.465953e-5$	$6.626421e-4$	$4.814610e-3$	$1.247365e-5$
8	$8.986791e-4$	$4.739392e-3$	$3.416670e-5$	$8.983933e-4$	$4.737584e-3$	$1.830032e-5$
10	$1.126190e-3$	$4.206735e-3$	$4.847444e-5$	$1.125828e-3$	$4.204577e-3$	$2.953972e-5$
12	$1.337033e-3$	$2.320788e-3$	$7.674138e-5$	$1.336594e-3$	$2.318540e-3$	$5.686891e-5$
14	$1.532242e-3$	$9.231768e-4$	$9.654557e-5$	$1.531725e-3$	$9.213058e-4$	$7.924044e-5$
16	$1.717380e-3$	$2.853675e-3$	$7.492316e-5$	$1.716788e-3$	$2.852067e-3$	$5.933184e-5$
18	$1.897074e-3$	$4.369929e-3$	$6.267050e-5$	$1.896409e-3$	$4.368101e-3$	$4.508511e-5$
20	$2.072206e-3$	$4.752252e-3$	$6.512857e-5$	$2.071471e-3$	$4.750000e-3$	$4.386567e-5$
22	$2.240661e-3$	$4.812121e-3$	$7.199859e-5$	$2.239855e-3$	$4.809392e-3$	$4.659014e-5$
24	$2.400032e-3$	$4.820328e-3$	$7.988992e-5$	$2.399155e-3$	$4.817110e-3$	$5.022477e-5$
26	$2.549815e-3$	$4.822834e-3$	$8.801574e-5$	$2.548866e-3$	$4.819123e-3$	$5.406634e-5$
28	$2.691462e-3$	$4.824935e-3$	$9.620011e-5$	$2.690440e-3$	$4.820732e-3$	$5.796268e-5$
30	$2.816891e-3$	$4.826899e-3$	$1.044019e-4$	$2.815797e-3$	$4.822202e-3$	$6.187302e-5$

Çizelge 5.39 : Şema-3 ile iki soliter dalgaının korunum sabitleri : $\Delta x = 0.025$, $\Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$

$\Delta t = 0.1$				$\Delta t = 0.01$		
t	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
2	37.9169117024	119.7318918512	737.4808198382	37.9169123073	120.5210974085	744.0734511614
4	37.9171146294	118.8700765261	730.3250774487	37.9171157029	120.5201560075	744.0656205690
6	37.9173517409	118.0281847579	723.3616923486	37.9173534839	120.5192193410	744.0578211505
8	37.9176039341	117.2135072104	716.6633410178	37.9176060703	120.5183144716	744.0501564498
10	37.9178523442	116.4586820152	710.5302266712	37.9178551253	120.5175863709	744.0430637370
12	37.9180884320	115.8884173432	705.9698055646	37.9180919505	120.5174426144	744.0379979951
14	37.9183134398	115.7003564159	704.2899759630	37.9183171773	120.5176291752	744.0363499724
16	37.9185321246	115.5630163582	702.8974223969	37.9185360539	120.5169000229	744.0340812659
18	37.9187481475	115.0702262591	698.8430576397	37.9187530061	120.5158347320	744.0284347261
20	37.9189628999	114.3852069115	693.2780726131	37.9189687714	120.5148610142	744.0211808030
22	37.9191753197	113.6560037390	687.3464858638	37.9191810657	120.5139191039	744.0134835432
24	37.9193822356	112.9271968649	681.4217856363	37.9193872602	120.5129788556	744.0056791442
26	37.9195808429	112.2094729453	675.5982306851	37.9195865949	120.5120374396	743.9978495426
28	37.9197721006	111.5050852271	669.8960664739	37.9197802876	120.5110955254	743.9900141159
30	37.9199564857	110.8142514470	664.3170685661	37.9199601099	120.5101535122	743.9821774346
$\Delta t = 0.001$				$\Delta t = 0.0001$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
2	37.9169123588	120.5220286075	744.0811999480	37.9169120685	120.5220278120	744.0811941186
4	37.9171157807	120.5220273068	744.0811905178	37.9171151650	120.5220255699	744.0811776394
6	37.9173535972	120.5220276347	744.0811811225	37.9173526564	120.5220249512	744.0811611511
8	37.9176062211	120.5220459327	744.0811717982	37.9176049555	120.5220422821	744.0811445583
10	37.9178553118	120.5221783883	744.0811627023	37.9178537211	120.5221736863	744.0811274865
12	37.9180921688	120.5226496651	744.0811546138	37.9180902526	120.5226436153	744.0811090620
14	37.9183174233	120.5229991060	744.0811502033	37.9183151819	120.5229912021	744.0810905320
16	37.9185363264	120.5225156086	744.0811477887	37.9185337653	120.5225059915	744.0810750594
18	37.9187533061	120.5221354893	744.0811417179	37.9187504329	120.5221247109	744.0810601568
20	37.9189690986	120.5220389692	744.0811332659	37.9189659160	120.5220272687	744.0810447779
22	37.9191814174	120.5220231021	744.0811241342	37.9191779268	120.5220105457	744.0810292643
24	37.9193876335	120.5220201607	744.0811148440	37.9193838350	120.5220067632	744.0810137185
26	37.9195869894	120.5220186468	744.0811055134	37.9195828827	120.5220044122	744.0809981640
28	37.9197807037	120.5220172344	744.0810961709	37.9197762888	120.5220021646	744.0809826144
30	37.9199605349	120.5220158566	744.0810868223	37.9199558118	120.5219999521	744.0809670629
Analitik Çözüm : $I_1 = 37.9166666667$, $I_2 = 120.5232340954$, $I_3 = 744.0812089579$						

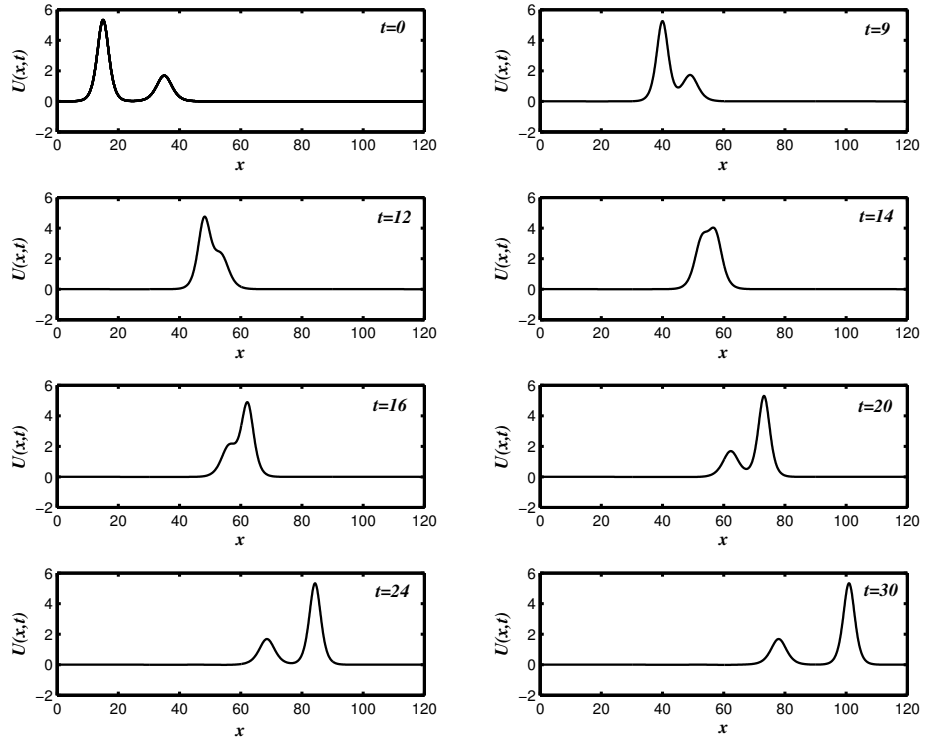
Çizelge 5.40 : Şema-3 ile iki soliter dalganın korunum sabitlerinin değişim miktarları :
 $\Delta x = 0.025, \Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$

t	$\Delta t = 0.1$			$\Delta t = 0.01$		
	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3
2	$2.450357e-4$	$7.913422e-1$	$6.600389e+0$	$2.456407e-4$	$2.136687e-3$	$7.757797e-3$
4	$4.479627e-4$	$1.653158e+0$	$1.375613e+1$	$4.490362e-4$	$3.078088e-3$	$1.558839e-2$
6	$6.850743e-4$	$2.495049e+0$	$2.071952e+1$	$6.868172e-4$	$4.014754e-3$	$2.338781e-2$
8	$9.372675e-4$	$3.309727e+0$	$2.741787e+1$	$9.394036e-4$	$4.919624e-3$	$3.105251e-2$
10	$1.185677e-3$	$4.064552e+0$	$3.355098e+1$	$1.188459e-3$	$5.647724e-3$	$3.814522e-2$
12	$1.421765e-3$	$4.634817e+0$	$3.811140e+1$	$1.425284e-3$	$5.791481e-3$	$4.321096e-2$
14	$1.646773e-3$	$4.822878e+0$	$3.979123e+1$	$1.650511e-3$	$5.604920e-3$	$4.485899e-2$
16	$1.865458e-3$	$4.960218e+0$	$4.118379e+1$	$1.869387e-3$	$6.334072e-3$	$4.712769e-2$
18	$2.081481e-3$	$5.453008e+0$	$4.523815e+1$	$2.086339e-3$	$7.399363e-3$	$5.277423e-2$
20	$2.296233e-3$	$6.138027e+0$	$5.080314e+1$	$2.302105e-3$	$8.373081e-3$	$6.002815e-2$
22	$2.508653e-3$	$6.867230e+0$	$5.673472e+1$	$2.514399e-3$	$9.314992e-3$	$6.772541e-2$
24	$2.715569e-3$	$7.596037e+0$	$6.265942e+1$	$2.720594e-3$	$1.025524e-2$	$7.552981e-2$
26	$2.914176e-3$	$8.313761e+0$	$6.848298e+1$	$2.919928e-3$	$1.119666e-2$	$8.335942e-2$
28	$3.105434e-3$	$9.018149e+0$	$7.418514e+1$	$3.113621e-3$	$1.213857e-2$	$9.119484e-2$
30	$3.289819e-3$	$9.708983e+0$	$7.976414e+1$	$3.293443e-3$	$1.308058e-2$	$9.903152e-2$
t	$\Delta t = 0.001$			$\Delta t = 0.0001$		
	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3
2	$2.456921e-4$	$1.205488e-3$	$9.009911e-6$	$2.454019e-4$	$1.206283e-3$	$1.483929e-5$
4	$4.491140e-4$	$1.206789e-3$	$1.844005e-5$	$4.484983e-4$	$1.208525e-3$	$3.131846e-5$
6	$6.869306e-4$	$1.206461e-3$	$2.783539e-5$	$6.8598983e-4$	$1.209144e-3$	$4.780673e-5$
8	$9.395545e-4$	$1.188163e-3$	$3.715966e-5$	$9.382889e-4$	$1.191813e-3$	$6.439958e-5$
10	$1.188645e-3$	$1.055707e-3$	$4.625556e-5$	$1.187054e-3$	$1.060409e-3$	$8.147141e-5$
12	$1.425502e-3$	$5.844303e-4$	$5.434405e-5$	$1.423586e-3$	$5.904801e-4$	$9.989588e-5$
14	$1.650757e-3$	$2.349894e-4$	$5.875457e-5$	$1.648515e-3$	$2.428933e-4$	$1.184258e-4$
16	$1.869660e-3$	$7.184868e-4$	$6.116917e-5$	$1.867099e-3$	$7.281039e-4$	$1.338985e-4$
18	$2.086639e-3$	$1.098606e-3$	$6.723999e-5$	$2.083766e-3$	$1.109384e-3$	$1.488010e-4$
20	$2.302432e-3$	$1.195126e-3$	$7.569198e-5$	$2.299249e-3$	$1.206827e-3$	$1.641799e-4$
22	$2.514751e-3$	$1.210993e-3$	$8.482363e-5$	$2.511260e-3$	$1.223550e-3$	$1.796935e-4$
24	$2.720967e-3$	$1.213935e-3$	$9.411392e-5$	$2.717168e-3$	$1.227332e-3$	$1.952394e-4$
26	$2.920323e-3$	$1.215449e-3$	$1.034445e-4$	$2.916216e-3$	$1.229683e-3$	$2.107939e-4$
28	$3.114037e-3$	$1.216861e-3$	$1.127870e-4$	$3.109622e-3$	$1.231931e-3$	$2.263435e-4$
30	$3.293868e-3$	$1.218239e-3$	$1.221356e-4$	$3.289145e-3$	$1.234143e-3$	$2.418950e-4$



Şekil 5.9 : Şema-3 ile bir soliter dalganın $t = 20$ zamanında mutlak hata grafiği : $c = 0.03$, $\Delta x = \Delta t = 0.1$

dalganın küçük genlikli dalganın önüne geçtiği ve daha sonra birbirlerinden tamamen ayrılarak ilerledikleri görülmektedir. $t = 30$ zamanında büyük genlikli dalga $x_1 = 100$ konumunda $3c_1 = 5.3309871518$ genliğine, küçük genlikli dalga $x_2 = 78.1$ konumunda $3c_2 = 1.6838548637$ genliğine sahiptir. Bu da dalgaların tamamen birbirlerinden ayrıldıktan sonra genliklerinin bir miktar küçüldüğünü, büyük genlikli dalganın hızı $v_1 = 2.8666666667$ ve küçük genlikli dalganın hızı $v_2 = 1.4366666667$ olup hızlarını hemen hemen koruyarak sağa doğru hareket ettiklerini göstermektedir.



Şekil 5.10 : Şema-3 ile iki soliter dalganın çeşitli zamanlarda yaklaşık çözümleri :
 $\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.01$

6. KARŞILAŞTIRMALAR VE SONUÇLAR

Bu bölümde, Bölüm 4 ve Bölüm 5'te elde edilen sayısal şemaların birbirleri ile ve daha önceki araştırmacıların çalışmaları ile karşılaştırmaları yapıldı.

İlk olarak bir soliter dalganın hareketi $c = 0.1$ olmak üzere $[-80, 120]$ konum aralığında $t = 20$ zamanında $\Delta x = \Delta t = 0.4, 0.2, 0.1, 0.05, 0.025$ adım uzunlukları için Şema-1-Şema-3 ile elde edilen sayısal sonuçların hata normlarının karşılaştırılması Çizelge 6.1'de ve korunum sabitleri ile korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları Çizelge 6.2'de verildi. Çizelge 6.1'den $\Delta x \rightarrow 0$ ve $\Delta t \rightarrow 0$ için her üç şema için hata normlarının küçüldüğü ve en küçük hata normunun Şema-3 ile elde edildiği görüldü. Çizelge 6.2'den $\Delta x \rightarrow 0$ ve $\Delta t \rightarrow 0$ için her üç şema ile elde edilen korunum sabitlerinin analitik değerlerle uyumlu olduğu, kütle korunum sabitinin mutlak değişim miktarının hemen hemen aynı kaldığı, momentum ve enerji korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarlarının küçüldüğü ve sonuç olarak korunum sabitlerinin oldukça iyi bir şekilde korunduğu görüldü.

Daha sonra bir soliter dalganın hareketi konum adım uzunluğu $\Delta x = 0.4, 0.2, 0.1, 0.05$ olmak üzere zaman adım uzunluğu $\Delta t = \Delta x^2$ olacak şekilde seçilip Şema-1-Şema-3 ile elde edilen sayısal sonuçların $t = 20$ zamanında hata normları Çizelge 6.3'te, korunum sabitleri ve korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları Çizelge 6.4'te verildi. Çizelge 6.3'ten $\Delta x \rightarrow 0$ ve $\Delta t \rightarrow 0$ için her üç şema ile elde edilen hata normlarının küçüldüğü, Şema-3 ile elde edilen hata normlarının diğer şemalarla elde edilen hata normlarından daha küçük olduğu görüldü. Çizelge 6.4'ten $\Delta x \rightarrow 0$ ve $\Delta t \rightarrow 0$ için kütle korunum sabitinin mutlak değişim miktarında çok az bir artış olduğu, momentum ve enerji korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarlarının küçüldüğü ve sonuç olarak korunum sabitlerinin oldukça iyi bir şekilde korunduğu görüldü.

Bir soliter dalganın hareketi $[-40, 60]$ ve $[-80, 120]$ konum aralıklarında, $c = 0.1$ olmak üzere $t = 20$ zamanında, $\Delta x = 0.125$ ve $\Delta t = 0.1$ adım uzunlukları için Şema-1-Şema-3 ile elde edilen sayısal sonuçların hata normları ve korunum sabitleri literatürdeki farklı çalışmalarla karşılaştırılarak Çizelge 6.5'te verildi. Çizelge 6.5'ten $[-40, 60]$ konum aralığında yapılan çalışmalardan Şema-3'ün en küçük hata normuna sahip olduğu görülmekle beraber $[-80, 120]$ konum aralığında yapılan çalışmalardan [15]-M1'den daha küçük hataya, [15]-M2'den daha büyük hataya sahip olduğu görüldü.

Bir soliter dalganın hareketi $\Delta x = 0.1$ ve $\Delta t = 0.1$ adım uzunlukları için Şema-1-Şema-3 ile elde edilen sayısal sonuçların hata normları ve korunum sabitleri literatürdeki farklı çalışmalarla

Çizelge 6.1 : $c = 0.1$ için bir soliter dalganın hata normlarının karşılaştırması

Şema-1		
$\Delta x = \Delta t$	L_2	L_∞
0.4	$8.4936743942e-3$	$3.2115481775e-3$
0.2	$2.1423348485e-3$	$8.1161586199e-4$
0.1	$5.3677822038e-4$	$2.0353303231e-4$
0.05	$1.3426940273e-4$	$5.0919407675e-5$
0.025	$3.3572031867e-5$	$1.2732178791e-5$
Şema-2		
	L_2	L_∞
0.4	$5.2396408440e-3$	$1.9621210969e-3$
0.2	$1.3043961442e-3$	$4.8944660355e-4$
0.1	$3.2744861854e-4$	$1.2349082100e-4$
0.05	$8.2186058797e-5$	$3.1106584483e-5$
0.025	$2.0597578102e-5$	$7.8124623926e-6$
Şema-3		
	L_2	L_∞
0.4	$2.7908993168e-3$	$1.1242411358e-3$
0.2	$3.5919742751e-4$	$1.4403889663e-4$
0.1	$4.5410835716e-5$	$1.8201029486e-5$
0.05	$5.7048447047e-6$	$2.2852001297e-6$
0.025	$7.1487436499e-7$	$2.8635102700e-7$

Çizelge 6.2 : $c = 0.1$ için bir soliter dalganın korunum sabitleri ve korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarlarının karşılaştırması

Şema-1						
$\Delta x = \Delta t$	I_1	I_2	I_3	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3
0.4	3.9799497485	0.8104033544	2.5789624860	$7.514167e-11$	$5.913985e-5$	$4.495093e-5$
0.2	3.9799497487	0.8104493844	2.5790045505	$2.240301e-10$	$1.310979e-5$	$2.886515e-6$
0.1	3.9799497488	0.8104593252	2.5790072553	$3.838894e-10$	$3.169056e-6$	$1.816491e-7$
0.05	3.9799497489	0.8104617088	2.5790074256	$5.083818e-10$	$7.854299e-7$	$1.137301e-8$
0.025	3.9799497490	0.8104622983	2.5790074363	$5.867018e-10$	$1.959297e-7$	$7.122938e-10$
Şema-2						
0.4	3.9799497485	0.8090392837	2.5744653130	$5.660494e-11$	$1.423211e-3$	$4.542124e-3$
0.2	3.9799497486	0.8102691658	2.5784102302	$1.927587e-10$	$1.933284e-4$	$5.972067e-4$
0.1	3.9799497488	0.8104363694	2.5789315301	$3.349800e-10$	$2.612487e-5$	$7.590689e-5$
0.05	3.9799497487	0.8104588181	2.5789978883	$3.131082e-10$	$3.676112e-6$	$9.548704e-6$
0.025	3.9799497479	0.8104619354	2.5790062388	$5.050578e-10$	$5.588415e-7$	$1.198198e-6$
Şema-3						
0.4	3.9799497485	0.8090202460	2.5744070886	$6.144818e-11$	$1.442248e-3$	$4.600348e-3$
0.2	3.9799497486	0.8102686085	2.5784087838	$2.129159e-10$	$1.938857e-4$	$5.986532e-4$
0.1	3.9799497488	0.8104363586	2.5789315210	$3.774514e-10$	$2.613564e-5$	$7.591601e-5$
0.05	3.9799497487	0.8104588182	2.5789978903	$3.070229e-10$	$3.675997e-6$	$9.546638e-6$
0.025	3.9799497475	0.8104619352	2.5790062384	$9.415233e-10$	$5.589887e-7$	$1.198577e-6$
Analitik	3.9799497484	0.8104624942	2.5790074370			

Çizelge 6.3 : $c = 0.1$ için bir soliter dalganın hata normlarının karşılaştırması : $\Delta t = \Delta x^2$

Şema-1		
Δx	L_2	L_∞
0.4	$5.7829560662e-3$	$2.1928423999e-3$
0.2	$4.5950389273e-3$	$1.7357327387e-3$
0.1	$3.3246436820e-4$	$1.2637479695e-4$
0.05	$8.2746743844e-5$	$3.1457021716e-5$
Şema-2		
	L_2	L_∞
0.4	$5.1707956273e-3$	$1.9574214472e-3$
0.2	$1.3155109072e-3$	$4.9975973911e-4$
0.1	$3.3009580338e-4$	$1.2548616645e-4$
0.05	$8.2598801885e-5$	$3.1401396662e-5$
Şema-3		
	L_2	L_∞
0.4	$1.8511957031e-4$	$7.3380611233e-5$
0.2	$3.4888453602e-6$	$1.3203820834e-6$
0.1	$1.2919545901e-7$	$5.0593084999e-8$
0.05	$7.7730587031e-9$	$2.9276398250e-9$

Çizelge 6.4 : $c = 0.1$ için bir soliter dalganın korunum sabitleri ve korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarlarının karşılaştırması : $\Delta t = \Delta x^2$

Şema-1						
Δx	I_1	I_2	I_3	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3
0.4	3.9799497485	0.8104087494	2.5789870830	$7.512480e-11$	$5.374481e-5$	$2.035398e-5$
0.2	3.9799497487	0.8104469331	2.5789938128	$2.240195e-10$	$1.556111e-5$	$1.362421e-5$
0.1	3.9799497488	0.8104593502	2.5790073699	$3.839116e-10$	$3.144030e-6$	$6.705961e-8$
0.05	3.9799497489	0.8104617104	2.5790074328	$5.072360e-10$	$7.838539e-7$	$4.154625e-9$
Şema-2						
0.4	3.9799497485	0.8103177065	2.5786877093	$6.639000e-11$	$1.447877e-4$	$3.197277e-4$
0.2	3.9799497486	0.8104483074	2.5790015092	$2.106328e-10$	$1.418685e-5$	$5.927820e-6$
0.1	3.9799497486	0.8104593271	2.5790072939	$1.646177e-10$	$3.167162e-6$	$1.430933e-7$
0.05	3.9799497454	0.8104617086	2.5790074269	$3.033430e-9$	$7.856363e-7$	$1.003172e-8$
Şema-3						
0.4	3.9799497485	0.8103191413	2.5786990716	$7.341061e-11$	$1.433529e-4$	$3.083654e-4$
0.2	3.9799497487	0.8104484900	2.5790025439	$2.485914e-10$	$1.400421e-5$	$4.893119e-6$
0.1	3.9799497488	0.8104593389	2.5790073603	$3.859735e-10$	$3.155301e-6$	$7.672522e-8$
0.05	3.9799497449	0.8104617091	2.5790074304	$3.522724e-9$	$7.851020e-7$	$6.563195e-9$
Analitik	3.9799497484	0.8104624942	2.5790074370			

Çizelge 6.5 : $c = 0.1$ için $t = 20$ zamanında bir soliter dalğanın hata normları ve korunum sabitlerinin karşılaştırması : $\Delta x = 0.125$, $\Delta t = 0.1$

$[a, b]$		L_2	L_∞	I_1	I_2	I_3
[-40, 60]	Şema-1	$7.2254e-4$	$2.7402e-4$	3.9799617147	0.8104575368	2.5790071111
	Şema-2	$5.1054e-4$	$1.9285e-4$	3.9799576466	0.8104346048	2.5789314778
	Şema-3	$4.7652e-5$	$1.8195e-5$	3.9799614155	0.8104345981	2.5789315208
	[5]-FEM	$2.157e-3$		3.990464	0.823457	2.673990
	[6]	$1.84e-5$	$1.5664e-3$	3.961597	0.804185	2.558292
	[37]	$2.27e-4$	$8.1e-5$	3.97986	0.810399	2.57880
	[8]	$5.11e-4$	$1.98e-4$	3.98206	0.811164	2.58133
	[18]-CBSCM2	$2.2050e-4$	$8.448e-5$	3.980016	0.8104624	2.579006
	[28]	$3.0e-4$	$1.16e-4$	3.979883	0.81027618	2.57839258
	[9]	$1.92e-4$	$7.3e-5$	3.97989	0.81046	2.57901
	[31]	$3.01e-4$	$1.14e-4$	3.97996	0.810276	2.57839
	[10]-QBGM1	$1.9215e-4$	$7.337e-5$	3.9798832	0.8104612	2.5790031
	[43]	$7.44691e-4$	$2.86720e-4$			
	[11]	$2.19e-4$	$8.6e-5$	3.97988	0.810465	2.57901
	[23]-AM1		$1.27e-5$	3.9798825	0.8104651	2.5790159
	[14]-EBSGM		$4.82e-5$	3.9798827	0.8104626	2.5790079
	[47]		$7.8e-5$	3.979926	0.810457	2.57900
	[15]-M1		$8.752e-5$	3.9798832	0.8104625	2.5790074
	[7]		$1.641e-4$	3.9820790	0.8112067	2.5814635
[-80, 120]	Şema-1	$7.2240e-4$	$2.7402e-4$	3.9799497488	0.8104575365	2.5790071112
	Şema-2	$5.1036e-4$	$1.9285e-4$	3.9799497487	0.8104346045	2.5789314780
	Şema-3	$4.5405e-5$	$1.8195e-5$	3.9799497487	0.8104345979	2.5789315210
	[15]-M1		$8.752e-5$	3.9799497	0.8104625	2.5790074
	[15]-M2		$1e-8$	3.9799497	0.8104625	2.5790074
	Analitik Çözüm			3.9799497484	0.8104624942	2.5790074370

karşılaştırılarak Çizelge 6.6’da verildi. Çizelge 6.6’dan $[-40, 60]$ konum aralığında Şema-3’ün en küçük hata normuna sahip olduğu ve $[-80, 120]$ konum aralığında [15]-M1’den daha küçük, diğerlerinden büyük hata normuna sahip olduğu görüldü.

Daha sonra bir soliter dalğanın hareketi $c = 0.03$ olmak üzere $[-80, 120]$ konum aralığında $\Delta x = \Delta t = 0.4, 0.2, 0.1, 0.05, 0.025$ adım uzunlukları için Şema-1-Şema-3 ile elde edilen sayısal sonuçların $t = 20$ zamanında hata normları Çizelge 6.7’de, korunum sabitleri ile korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları Çizelge 6.8’de verildi. Çizelge 6.7’den $\Delta x \rightarrow 0$ ve $\Delta t \rightarrow 0$ için her üç şema ile elde edilen hata normlarının küçüldüğü ve Şema-3’ün en küçük hata normuna sahip olduğu görüldü. Çizelge 6.8’den $\Delta x \rightarrow 0$ ve $\Delta t \rightarrow 0$ için her üç şema ile elde edilen korunum sabitlerinin de analitik değerlerle uyumlu olduğu, kütle korunum sabitinin mutlak değişim miktarının hemen hemen aynı kaldığı, momentum ve enerji korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarlarının küçüldüğü ve sonuç olarak korunum sabitlerinin oldukça iyi bir şekilde korunduğu görüldü. Şema-1 ile enerji korunum sabitinin çok daha iyi korunduğu görüldü.

Son olarak bir soliter dalğanın hareketi konum adım uzunluğu $\Delta x = 0.4, 0.2, 0.1, 0.05$ olmak üzere zaman adım uzunluğu $\Delta t = \Delta x^2$ olacak şekilde seçilip Şema-1-Şema-3 ile elde edilen sayısal sonuçların $t = 20$ zamanında hata normları Çizelge 6.9’da, korunum sabitleri ve korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları Çizelge 6.10’da verildi. Çizelge 6.9’dan $\Delta x \rightarrow 0$ için her üç şemanın da hata normlarının yeterince küçük olduğu ancak Şema-1 ve Şema-2’nin $\Delta x \rightarrow 0$

Çizelge 6.6 : $c = 0.1$ için $t = 20$ zamanında bir soliter dalğanın hata normları ve korunum sabitlerinin karşılaştırması : $\Delta x = \Delta t = 0.1$

$[a, b]$		L_2	L_∞	I_1	I_2	I_3
[-40, 60]	Şema-1	$5.3702e-4$	$2.0353e-4$	3.9799702492	0.8104593256	2.5790072554
	Şema-2	$3.2780e-4$	$1.2349e-4$	3.9799655300	0.8104363697	2.5789315300
	Şema-3	$4.9634e-5$	$1.8206e-5$	3.9799885565	0.8104387075	2.5789315213
	[9]	$1.92e-03$	$7.4e-5$	3.97989	0.81047	2.57901
	[19]	$3.6875e-4$	$1.3204e-4$	3.97994	0.81044	2.57894
	[20]	$5.322353e-4$	$2.272278e-4$	3.978035	0.8097240	2.576573
	[11]	$1.196e-3$	$3.73e-4$			
	[43]	$5.5e-4$	$2.1e-4$	3.97997	0.810459	2.57901
	[21]-QCBM1	$2.15e-4$	$8.3e-5$	3.97996	0.81046	2.57901
	[21]-QCBM2	$3.57e-4$	$1.29e-4$	3.97996	0.81046	2.57901
	[38]-FLF	$1.961e-1$	$6.735e-2$	4.41219	0.897342	2.85361
	[40]	$3.3080e-4$	$1.25611e-4$			
	[47]		$8.0e-5$	3.97992	0.810459	2.57900
	Analitik Çözüm			3.9799497484	0.8104624942	2.5790074370
[-80, 120]	Şema-1	$5.3678e-4$	$2.0353e-4$	3.9799497488	0.8104593252	2.5790072553
	Şema-2	$3.2745e-4$	$1.2349e-4$	3.9799497488	0.8104363694	2.5789315301
	Şema-3	$4.5411e-5$	$1.8201e-5$	3.9799497488	0.8104363586	2.5789315210
	[23]-AM1		$2.05e-6$			
	[23]-AM2		$3.55e-7$			
	[15]-M1		$8.75e-5$	3.9799497193	0.8104625078	2.5790074216
	[15]-M2		$1.27e-8$	3.9799497440	0.8104625075	2.5790074319
	[25]	$1.130e-6$	$4.036e-7$	3.9799497	0.8104625	2.5790075
	Analitik Çözüm			3.9799497484	0.8104624942	2.5790074370

Çizelge 6.7 : $c = 0.03$ için bir soliter dalğanın hata normlarının karşılaştırması

Şema-1		
$\Delta x = \Delta t$	L_2	L_∞
0.4	$6.2658007552e-4$	$1.8712619119e-4$
0.2	$1.5698309239e-4$	$4.6852411337e-5$
0.1	$3.9272849567e-5$	$1.1717235113e-5$
0.05	$9.8684803179e-6$	$2.9295622931e-6$
0.025	$2.7312817863e-6$	$7.3240635258e-7$
Şema-2		
	L_2	L_∞
0.4	$3.9442500862e-4$	$1.1858568925e-4$
0.2	$1.0038826987e-4$	$3.0055884616e-5$
0.1	$2.5348163218e-5$	$7.5753887210e-6$
0.05	$6.4410558431e-6$	$1.9024110738e-6$
0.025	$1.9877899494e-6$	$4.7672562881e-7$
Şema-3		
	L_2	L_∞
0.4	$1.0360500671e-4$	$3.6967310289e-5$
0.2	$1.3261286781e-5$	$4.7301134353e-6$
0.1	$1.8213691762e-6$	$5.9770552266e-7$
0.05	$1.0456440693e-6$	$2.9271258880e-7$
0.025	$1.2173271389e-6$	$3.4125245739e-7$

Çizelge 6.8 : $c = 0.03$ için bir soliter dalğanın korunum sabitleri ve korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarlarının karşılaştırması

Şema-1						
$\Delta x = \Delta t$	I_1	I_2	I_3	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3
0.4	2.1094070750	0.1273008789	0.3888058892	$4.247993e-7$	$8.397429e-7$	$1.011620e-7$
0.2	2.1094086466	0.1273015127	0.3888059840	$1.146827e-6$	$2.058799e-7$	$6.373670e-9$
0.1	2.1094103333	0.1273016674	0.3888059900	$2.833591e-6$	$5.121262e-8$	$3.960451e-10$
0.05	2.1094116468	0.1273017058	0.3888059903	$4.147041e-6$	$1.278462e-8$	$1.952477e-11$
0.025	2.1094124800	0.1273017154	0.3888059904	$4.980215e-6$	$3.190263e-9$	$5.450806e-12$
Şema-2						
0.4	2.1094071122	0.1272844848	0.3887552430	$3.875747e-7$	$1.723379e-5$	$5.074735e-5$
0.2	2.1094085402	0.1272994050	0.3887994719	$1.040416e-6$	$2.313640e-6$	$6.518449e-6$
0.1	2.1094102018	0.1273014008	0.3888051661	$2.702100e-6$	$3.178648e-7$	$8.242891e-7$
0.05	2.1094115475	0.1273016723	0.3888058867	$4.047772e-6$	$4.631113e-8$	$1.036123e-7$
0.025	2.1094124186	0.1273017112	0.3888059772	$4.918896e-6$	$7.459750e-9$	$1.318684e-8$
Şema-3						
0.4	2.1094071468	0.1272844350	0.3887551013	$3.529760e-7$	$1.728365e-5$	$5.088910e-5$
0.2	2.1094087098	0.1272994039	0.3887994695	$1.210076e-6$	$2.314702e-6$	$6.520861e-6$
0.1	2.1094104417	0.1273014008	0.3888051661	$2.941951e-6$	$3.178594e-7$	$8.242159e-7$
0.05	2.1094117492	0.1273016723	0.3888058867	$4.249461e-6$	$4.631000e-8$	$1.036054e-7$
0.025	2.1094125492	0.1273017111	0.3888059771	$5.049500e-6$	$7.487862e-9$	$1.327390e-8$
Analitik	2.1094074997	0.1273017186	0.3888059903			

için $L_2 \rightarrow 0$ ve $L_\infty \rightarrow 0$ olmakla beraber Şema-3'ün hata normlarının biraz arttığı görüldü. Çizelge 6.10'dan $\Delta x \rightarrow 0$ için her üç şemanın da korunum sabitlerinin analitik değerleriyle uyumlu olduğu, kütle korunum sabitinin mutlak değişim miktarının hemen hemen aynı kaldığı, momentum ve enerji korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarlarının küçüldüğü ve sonuç olarak korunum sabitlerinin iyi bir şekilde korunduğu görüldü. Her üç şemanın da enerji korunum sabitini en iyi şekilde koruduğu görüldü.

Bir soliter dalğanın hareketi $c = 0.03$ olmak üzere $t = 20$ zamanında $\Delta x = 0.125$ ve $\Delta t = 0.1$ adım uzunlukları için Şema-1-Şema-3 ile elde edilen sayısal sonuçların hata normları ve korunum sabitleri hesaplanarak literatürdeki farklı çalışmalarla karşılaştırması Çizelge 6.11'de verildi. Çizelge 6.11'den $[-40, 60]$ konum aralığında şemaların hata normlarının çizelgede verilen çalışmalarla uyumlu olduğu ve $[-80, 120]$ konum aralığında şemaların hata normlarının çizelgede verilen diğer çalışmaların hata normlarından daha küçük olduğu görüldü.

Son olarak bir soliter dalğanın hareketi $\Delta x = 0.1$ ve $\Delta t = 0.1$ adım uzunlukları için Şema-1-Şema-3 ile elde edilen sayısal sonuçların hata normları ve korunum sabitlerinin literatürdeki mevcut çalışmalar ile karşılaştırması Çizelge 6.12'de verildi. Çizelge 6.12'den $[-40, 60]$ konum aralığında şemaların hata normlarının çizelgede verilen diğer çalışmaların hata normları ile uyumlu olduğu ve $[-80, 120]$ konum aralığında şemaların hata normlarının [25]'den daha büyük olmakla beraber Şema-3'ün hata normlarının çizelgedeki diğer çalışmalardan daha küçük olduğu görüldü.

Çizelge 6.9 : $c = 0.03$ için bir soliter dalganın hata normlarının karşılaştırması : $\Delta t = \Delta x^2$

Şema-1		
Δx	L_2	L_∞
0.4	$4.4407239545e-4$	$1.3275356306e-4$
0.2	$1.0455740644e-4$	$3.1240098357e-5$
0.1	$2.5742403252e-5$	$7.6875787741e-6$
0.05	$6.4849334628e-6$	$1.9142321108e-6$
Şema-2		
	L_2	L_∞
0.4	$4.0245336505e-4$	$1.2024782834e-4$
0.2	$1.0196411150e-4$	$3.0464547274e-5$
0.1	$2.5580275180e-5$	$7.6390928111e-6$
0.05	$6.4747700706e-6$	$1.9111405520e-6$
Şema-3		
	L_2	L_∞
0.4	$6.8398616367e-6$	$2.4351913856e-6$
0.2	$3.5873751521e-7$	$1.0904691000e-7$
0.1	$7.4117219715e-7$	$2.2015406210e-7$
0.05	$1.0445518094e-6$	$2.9778287678e-7$

Çizelge 6.10 : $c = 0.03$ için bir soliter dalganın korunum sabitleri ve korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarlarının karşılaştırması : $\Delta t = \Delta x^2$

Şema-1						
Δx	I_1	I_2	I_3	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3
0.4	2.1094070750	0.1273008913	0.3888059425	$4.247651e-7$	$8.272885e-7$	$4.784508e-8$
0.2	2.1094086466	0.1273015136	0.3888059877	$1.146826e-6$	$2.050042e-7$	$2.618224e-9$
0.1	2.1094103333	0.1273016675	0.3888059902	$2.833594e-6$	$5.115642e-8$	$1.549106e-10$
0.05	2.1094116468	0.1273017058	0.3888059903	$4.147044e-6$	$1.278101e-8$	$4.140299e-12$
Şema-2						
0.4	2.1094070905	0.1272998110	0.3888026066	$4.092518e-7$	$1.907629e-6$	$3.383732e-6$
0.2	2.1094086246	0.1273014965	0.3888059348	$1.124875e-6$	$2.221619e-7$	$5.559458e-8$
0.1	2.1094103198	0.1273016672	0.3888059893	$2.820088e-6$	$5.143936e-8$	$1.028556e-9$
0.05	2.1094116399	0.1273017056	0.3888059896	$4.140167e-6$	$1.301105e-8$	$7.149469e-10$
Şema-3						
0.4	2.1094071263	0.1272998160	0.3888026365	$3.734189e-7$	$1.902584e-6$	$3.353860e-6$
0.2	2.1094088043	0.1273014970	0.3888059373	$1.304564e-6$	$2.216455e-7$	$5.307931e-8$
0.1	2.1094105698	0.1273016672	0.3888059895	$3.070006e-6$	$5.139452e-8$	$8.322007e-10$
0.05	2.1094118462	0.1273017056	0.3888059895	$4.346449e-6$	$1.304142e-8$	$8.053893e-10$
Analitik	2.1094074997	0.1273017186	0.3888059903			

Çizelge 6.11 : $c = 0.03$ için $t = 20$ zamanında bir soliter dalganın hata normları ve korunum sabitlerinin karşılaştırması : $\Delta x = 0.125$, $\Delta t = 0.1$

$[a, b]$		L_2	L_∞	I_1	I_2	I_3
[-40, 60]	Şema-1	$5.5043e-4$	$4.3151e-4$	2.1090141280	0.1273023724	0.3888063306
	Şema-2	$5.3057e-4$	$4.3151e-4$	2.1089163302	0.1273020527	0.3888053562
	Şema-3	$5.7735e-4$	$4.3151e-4$	2.1091263062	0.1273021051	0.3888056248
	[5]-FEM	$1.3e-5$		2.10471	0.127588	0.392029
	[6]	$2.81e-5$	$1.5506e-3$	2.128869	0.127228	0.388571
	[58]	$2.4185e-4$	$1.2464e-4$	2.10741	0.127230	0.38856
	[37]	$5.37e-4$	$3.16e-4$	2.10908	0.127318	0.388854
	[8]	$5.35e-4$	$1.98e-4$	2.10906	0.127305	0.388815
	[9]	$5.42e-4$	$1.99e-4$	2.10467	0.12730	0.38880
	[19]	$5.4701e-4$	$4.3151e-4$	2.10902	0.12731	0.38881
	[31]	$5.47e-4$	$4.31e-4$	2.10900	0.127294	0.388781
	[10]-M1	$5.58e-4$	$2.05e-4$	2.10460	0.12730	0.38880
	[21]-QCBM2	$3.56e-4$	$2.95e-4$	2.10831	0.12913	0.38881
	[4]	$3.47e-4$	$2.39e-4$	2.10769	0.127260	0.388677
	[23]-AM1		$4.32e-4$	2.1045682	0.1273010	0.3888023
	[12]	$5.59402e-4$	$4.39145e-4$	2.10902	0.12730	0.38880
	[14]-EBSGM		$4.31512e-4$	2.1045885	0.1273012	0.3888023
	[17]	$5.25073e-4$	$1.98401e-4$	2.109032	0.127302	0.388806
	[7]		$1.04e-5$	2.1069847	0.1273179	0.3888559
[-80, 120]	Şema-1	$5.3664e-5$	$1.6016e-5$	2.1094098147	0.1273016386	0.3888059896
	Şema-2	$3.9577e-5$	$1.1824e-5$	2.1094097077	0.1273013720	0.3888051659
	Şema-3	$1.7786e-6$	$5.9759e-7$	2.1094099414	0.1273013720	0.3888051661
	[43]	$5.4606e-5$	$1.6471e-5$			
	[61]	$6.5e-5$	$2.0e-5$			
Analitik Çözüm				2.1094074997	0.1273017186	0.3888059903

Çizelge 6.12 : $c = 0.03$ için $t = 20$ zamanında bir soliter dalganın hata normları ve korunum sabitlerinin karşılaştırması : $\Delta x = \Delta t = 0.1$

$[a, b]$		L_2	L_∞	I_1	I_2	I_3
[-40, 60]	Şema-1	$6.5258e-4$	$4.3151e-4$	2.1094918236	0.1273026910	0.3888069305
	Şema-2	$6.2834e-4$	$4.3151e-4$	2.1093714723	0.1273023520	0.3888059106
	Şema-3	$6.7837e-4$	$4.3151e-4$	2.1095877317	0.1273024226	0.3888062103
	[9]	$5.41e-4$	$1.99e-4$	2.10707	0.12730	0.38880
	[19]	$6.5102e-4$	$4.3151e-3$	2.10948	0.12730	0.38880
	[20]	$5.724779e-4$	$3.649897e-4$	2.103622	0.1271840	0.3884398
	[43]	$6.38e-4$	$2.33e-4$	2.109	0.127302	0.388807
	[21]-QCBM1	$4.94e-4$	$3.76e-4$	2.10897	0.13008	0.38881
	[21]-QCBM2	$4.91e-4$	$3.67e-4$	2.10896	0.13013	0.38881
	[40]	$6.3748e-4$	$2.3300e-4$			
[-80, 120]	Şema-1	$3.9273e-5$	$1.1717e-5$	2.1094103333	0.1273016674	0.3888059900
	Şema-2	$2.5348e-5$	$7.5754e-6$	2.1094102018	0.1273014008	0.3888051661
	Şema-3	$1.8214e-6$	$5.9771e-7$	2.1094104417	0.1273014008	0.3888051661
	[43]	$5.4606e-5$	$1.6471e-5$			
	[40]	$2.5606e-5$	$7.6472e-6$			
	[25]	$7.144e-8$	$2.263e-8$	2.1094075	0.1273017	0.3888060
Analitik Çözüm				2.1094074997	0.1273017186	0.3888059903

Çizelge 6.13 : İki soliter dalganın korunum sabitlerinin karşılaştırması : $\Delta x = 0.1$, $\Delta t = 0.01$

Şema-1			
t	I_1	I_2	I_3
6	37.9172619039	120.5031287876	744.0707950404
12	37.9177899013	120.4792678472	743.6875215567
18	37.9181545979	120.4957735191	743.9665701098
24	37.9184382160	120.5036995342	744.0779021405
30	37.9186294834	120.5038888754	744.0800250105
Şema-2			
6	37.9172619037	120.5003831016	744.0480378265
12	37.9177899000	120.4757798800	743.6624822354
18	37.9181545949	120.4900057593	743.9193423837
24	37.9184382153	120.4947393767	744.0031458681
30	37.9186294705	120.4921205283	743.9818836103
Şema-3			
6	37.9172831897	120.5011884284	744.0578280441
12	37.9178428262	120.5087384051	744.0375095889
18	37.9182380383	120.4994843243	744.0283423445
24	37.9185459342	120.4949589226	744.0056932695
30	37.9187529687	120.4921210027	743.9821942191
Analitik Çözüm			
	37.9166666667	120.5232340954	744.0812089579

Çizelge 6.14 : İki soliter dalganın korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarlarının karşılaştırması : $\Delta x = 0.1$, $\Delta t = 0.01$

	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3
Şema-1	$1.9628167632e - 3$	$1.9345219946e - 2$	$1.1839473333e - 3$
Şema-2	$1.9628037893e - 3$	$3.1113567038e - 2$	$9.9325347618e - 2$
Şema-3	$2.0863020176e - 3$	$3.1113092639e - 2$	$9.9014738803e - 2$

Yapılan karşılaştırmalar sonucunda konum aralığının seçimine bağlı olarak bir soliter dalganın hareketinin hata normlarının değiştiği görüldü.

$k_1 = 0.4$, $k_2 = 0.3$, $x_1 = 15$, $x_2 = 35$ için $[0, 120]$ konum aralığında iki soliter dalganın hareketinin $t = 6, 12, 18, 24, 30$ zamanlarında $\Delta x = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ adım uzunlukları için Şema-1-Şema-3 ile elde edilen sayısal sonuçların korunum sabitlerinin karşılaştırması Çizelge 6.13'te, $t = 30$ zamanında korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarlarının karşılaştırması Çizelge 6.14'te verildi. Çizelge 6.13 ve Çizelge 6.14'ten Şema-1 ve Şema-2 için dalgaların birbirleri ile etkileşmeye başladığı zamandan ayrıldıkları zamana kadar korunum sabitlerinin bir miktar bozulduğu, Şema-3 ile elde edilen korunum sabitlerinin analitik değerler ile daha uyumlu olduğu görüldü.

Çizelge 6.15 : İki soliter dalğanın korunum sabitlerinin karşılaştırması: $\Delta x = 0.025, \Delta t = 0.001$

Şema-1			
t	I_1	I_2	I_3
6	37.9173468885	120.5219816252	744.0806265060
12	37.9180720678	120.5205723084	744.0574973637
18	37.9187143558	120.5215494089	744.0744201083
24	37.9193256259	120.5220167188	744.0810667494
30	37.9198725611	120.5220279755	744.0811933598
Şema-2			
6	37.9173468139	120.5219787819	744.0806038620
12	37.9180719156	120.5205831628	744.0576269788
18	37.9187141259	120.5215465103	744.0744064344
24	37.9193253185	120.5220059620	744.0809779472
30	37.9198721758	120.5220138714	744.0810767601
Şema-3			
6	37.9173535972	120.5220276347	744.0811811225
12	37.9180921688	120.5226496651	744.0811546138
18	37.9187533061	120.5221354893	744.0811417179
24	37.9193876335	120.5220201607	744.0811148440
30	37.9199605349	120.5220158566	744.0810868223
Analitik çözüm			
	37.9166666667	120.5232340954	744.0812089579

Çizelge 6.16 : İki soliter dalğanın korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarlarının karşılaştırması: $\Delta x = 0.025, \Delta t = 0.001$

	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3
Şema-1	$3.2058943880e-3$	$1.2061198435e-3$	$1.5598094592e-5$
Şema-2	$3.2055091221e-3$	$1.2202239468e-3$	$1.3219778612e-4$
Şema-3	$3.2938682644e-3$	$1.2182387879e-3$	$1.2213559069e-4$

İki soliter dalğanın hareketi $t = 6, 12, 18, 24, 30$ zamanlarında $\Delta x = 0.025$ ve $\Delta t = 0.001$ adım uzunlukları için Şema-1-Şema-3 ile elde edilen sayısal sonuçların korunum sabitleri Çizelge 6.15'te, $t = 30$ zamamında korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları Çizelge 6.16'da verildi. Çizelge 6.15 ve Çizelge 6.16'dan her üç şema için de korunum sabitlerinin analitik değerler ile oldukça uyumlu olduğu görüldü.

Sonuç olarak Çizelge 6.13-6.16'dan Şema-1-Şema-3 ile elde edilen korunum sabitlerinin Δx ve Δt adım uzunluklarının küçülmesi ile korunum sabitlerinin analitik değerlerine daha yakın olduğu görüldü.

İki soliter dalğanın hareketi $t = 25$ zamanında $[0, 120]$ konum aralığında $k_1 = 0.4, k_2 = 0.3, x_1 = 15, x_2 = 35$ olmak üzere farklı konum ve zaman adım uzunlukları için Şema-1-Şema-3

Çizelge 6.17 : İki soliter dalgaının $t = 25$ zamanında korunum sabitlerinin karşılaştırılması

	Δx	Δt	I_1	I_2	I_3
Şema-1	0.3	0.1	37.9174635815	120.3405795776	743.9426778408
Şema-2			37.9174650834	112.9206512386	682.6139568881
Şema-3			37.9174946407	112.4336278284	678.6516891924
[17]			37.858731	120.176525	744.091498
[43]			37.91745	120.35950	744.00850
[20]			38.050100	119.835500	727.439200
Şema-1	0.2	0.1	37.9178114827	120.4421247257	744.0322462581
Şema-2			37.9178127491	112.7297839657	680.3763776497
Şema-3			37.9178711833	112.5038857237	678.5334232174
[44]			37.91812	120.51241	744.00543
Şema-1	0.2	0.01	37.9178113706	120.4450198786	744.0608774378
Şema-2			37.9178113707	120.4358488509	743.9843328868
Şema-3			37.9178875228	120.4370891096	744.0018349418
[24]			37.916663	120.52297	744.07896
Analitik Çözüm			37.9166666667	120.5232340954	744.0812089579

ile elde edilen korunum sabitleri literatürdeki mevcut bazı çalışmalarla karşılaştırması Çizelge 6.17’de verildi. Çizelge 6.17’den şemalarla elde edilen sayısal sonuçların korunum sabitlerinin çizelgede verilen diğer araştırmacıların elde ettiği korunum sabitlerinin değerleriyle uyumlu ve adım uzunlukları küçüldükçe korunum sabitlerinin analitik değerleriyle de uyumlu olduğu görüldü.

İki soliter dalgaının hareketi $t = 30$ zamanında $[0, 120]$ konum aralığında $k_1 = 0.4$, $k_2 = 0.3$, $x_1 = 15$, $x_2 = 35$ olmak üzere farklı konum ve zaman adım uzunlukları için Şema-1-Şema-3 ile elde edilen korunum sabitleri, literatürdeki mevcut bazı çalışmalarla karşılaştırması Çizelge 6.18’de verildi. Çizelge 6.18’den Δx küçüldükçe Şema-1 ile elde edilen sayısal sonuçların korunum sabitlerinin diğer araştırmacıların çalışmaları ve analitik değerler ile daha uyumlu olduğu, Şema-2 ve Şema-3’ün ise bu parametrelerle elde edilen sayısal sonuçlarının analitik değerlerle yeterince uyumlu sonuçlar vermediği görülmektedir.

Yapılan karşılaştırmalar sonucunda iki soliter dalgaının hareketinin adım uzunlukları küçüldükçe korunum sabitlerini daha iyi koruduğu görüldü.

Sonuç olarak önerilen şemaların elde edilişlerinin ve program kodlarının yazılmasının kolay, elde edilen sayısal sonuçların yeterince doğru olması sebebiyle benzer lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümünde rahatlıkla uygulanabileceği görülmektedir.

Çizelge 6.18 : İki soliter dalganın $t = 30$ zamanında korunum sabitlerinin karşılaştırılması

	Δx	Δt	I_1	I_2	I_3
Şema-1	1	0.1	37.9170181542	118.2318688823	735.5393659267
Şema-2			37.9170265332	113.6600255587	697.2433662260
Şema-3			37.9168595422	110.9611012691	677.1302876528
[34]-CDQM			37.91702	120.52249	744.07479
Şema-1	0.3	0.1	37.9174628945	120.3421929032	743.9599177021
Şema-2			37.9174629968	111.2713705957	669.2235987379
Şema-3			37.9174886098	110.6877580303	664.4972457864
[14]-EBSGM			37.650120	116.909863	714.174760
[27]			37.91660331	120.71659130	745.69164620
[26]			37.91665014	120.72293581	745.74778597
Şema-1	0.1	0.1	37.9186310292	120.5028093411	744.0700008050
Şema-2			37.9186328953	110.8682622676	664.8836665136
Şema-3			37.9187402797	110.7990766276	664.3217802812
[25]			37.9205452	120.7229392	745.7477997
Analitik Çözüm			37.9166666667	120.5232340954	744.0812089579

KAYNAKLAR

- [1] **Peregrine, D.H.** (1966). Calculations of the development of an undular bore, *Journal of Fluid Mechanics*, 25, 321-330.
- [2] **Benjamin, T.B., Bona, J.L. ve Mahony, J.J.** (1972). Model Equations for Long Waves in Nonlinear Dispersive Systems, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 272, 47-48.
- [3] **Bona, J.L. ve Bryant, P.J.** (1973). A mathematical model for long waves generated by wavemakers in nonlinear dispersive systems, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 73, 391-405.
- [4] **Gardner, L.R.T., Gardner, G.A. ve Doğan, A.** (1996). A least-squares finite element scheme for the RLW equation, *Commun. Numer. Meth. Eng.*, 12(11), 795-804.
- [5] **Dağ, İ.** (2000). Least-squares quadratic B-spline finite element method for the regularized long wave equation, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 182, 205-215.
- [6] **Dağ, İ. ve Özer, M.N.** (2001). Approximation of the RLW equation by the least square cubic B-spline finite element method, *Appl. Math. Model.*, 25, 221-231.
- [7] **Hepson, O. E., Dağ, İ., Saka, B. ve Ay, B.** (2021). The cubic B-spline least-squares finite-element method for the numerical solutions of regularized long-wave equation, *Int. J. Comput. Math.*, 1-12
- [8] **Doğan, A.** (2002). Numerical solution of RLW equation using linear finite elements within Galerkins method, *Appl. Math. Model.*, 26, 771-783.
- [9] **Saka, B., Dağ, İ. ve Doğan, A.** (2004). A Galerkin method for the numerical solution of the RLW equation using quadratic B-spline, *Int. J. Comput. Math.*, 81, 727-739.
- [10] **Dağ, İ., Saka, B. ve Irk, D.** (2006). Galerkin method for the numerical solution of RLW equation using quintic B-spline, *J. Comput. Appl. Math.*, 190, 532-547.
- [11] **Esen, A. ve Kutluay, S.** (2006). Application of a lumped Galerkin method to the regularized long wave equation, *Appl. Math. Comput.*, 174, 833-845.
- [12] **Mei, L. ve Chen, Y.** (2012). Numerical solutions of RLW equation using Galerkin method with extrapolation techniques, *Computer Physics Communications*, 183(8), 1609-1616.
- [13] **Irk, D. ve Keskin, P.** (2017). Quadratic trigonometric B-splines Galerkin method for the Regularized Long Wave Equation, *J. Appl. Anal. Comput.*, 7(2), 617-631.
- [14] **Gorgulu, M.Z., Dağ, İ. ve Irk, D.** (2017). Simulations of solitary waves of RLW equation by exponential B-spline Galerkin method, *Chin. Phys. B*, 26(8).
- [15] **Irk, D., Yıldız, P.K. ve Görgülü, M.Z.** (2019). Quartic trigonometric B-spline algorithm for numerical solution of the regularized long wave equation, *Turk. J. Math. Appl.*, 43, 112-125.
- [16] **Bhardwaj, D. ve Shankar, A.** (2000). A computational method for regularized long wave equation, *Comp. Math. Appl.*, 40, 1397-1404.

- [17] **Yağmurlu, N.M., Uçar, Y. ve Çelikkaya, I.** (2018). Operator splitting for numerical solutions of the RLW equation, *J. Appl. Anal. Comput.*, 8(5), 1494-1510.
- [18] **Dağ, İ., Doğan, A. ve Saka, B.** (2003). B-spline collocation methods for numerical solutions of the RLW equation, *Internat. J. Comput. Math.*, 80, 743-757.
- [19] **Saka, B. ve Dağ, İ.** (2005). A collocation method for the numerical solution of the RLW equation using cubic B-spline basis, *The Arabian Journal for Science and Engineering Section A. Science*, 30(1), 39-50.
- [20] **Raslan, K.R.** (2005). A computational method for the regularized long wave (RLW) equation, *Appl. Math. Comput.*, 167:2, 1101-1118.
- [21] **Saka, B. ve Dağ, İ.** (2007). Quartic B-spline Collocation Algorithms for Numerical Solution of the RLW Equation, *Numer. Meth. Part. D. E.*, 23:3, 731-751.
- [22] **Islam, S.L., Haq, S. ve Ali, A.** (2009). A meshfree method for the numerical solution of the RLW equation, *J. Comput. Appl. Math.*, 223, 997-1012.
- [23] **Irk, D.** (2012). Solitary wave solutions for the regularized long-wave equation, *Phys. Wave Phenom.*, 20(3), 174-183.
- [24] **Shokri, A. ve Dehghan, M.** (2010). A Meshless Method Using the Radial Basis Functions for Numerical Solution of the Regularized Long Wave Equation, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 26, 807-825.
- [25] **Dağ, İ., Hepson, O.E. ve Saka, B.** (2022). A higher-order efficient approach to numerical simulations of the RLW equation. *Pramana - J Phys.*, 96, 30.
- [26] **Saka, B., Dağ, İ. ve Hepson, Ö.E.** (2023). Integration of the RLW equation using higher-order predictor-corrector scheme and quintic B-spline collocation method, *Mathematical Sciences* 17, 491-502.
- [27] **Saka, B., Dağ, İ. ve Hepson, Ö.E.** (2023). High Order Predictor-Corrector Cubic B-Spline Collocation Method for Modeling Solitary Waves, *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 94, 83-98.
- [28] **Dağ, İ., Saka, B. ve Irk, D.** (2004). Application of cubic B-spline for numerical solution of the RLW equation, *Appl. Math. Comput.*, 159, 373-389.
- [29] **Dağ, İ. ve Dereli, Y.** (2010). Numerical solution of RLW equation using radial basis functions, *Int. J. Comput. Math.*, 87(1), 63-76.
- [30] **Başhan, A. ve Yağmurlu, N.M.** (2022). A mixed method approach to the solitary wave, undular bore and boundary-forced solutions of the Regularized Long Wave equation, *Comput. Appl. Math.*, 41,169.
- [31] **Irk, D., Dağ, İ. ve Doğan, A.** (2005). Numerical integration of the Rlw equation using cubic splines, *Anzaim J.*, 47, 131-142.
- [32] **Hammad, D.A.** (2021). Application of Bernstein collocation method for solving the generalized regularized long wave equations, *Ain Shams Eng.*, 12, 4081-4089.
- [33] **Kukreja, V.K.** (2021). Analysis of RLW and MRLW equation using an improvised collocation technique with SSP-RK43 scheme, *Wave Motion*, 105 102761.

- [34] **Dağ, İ., Korkmaz, A. ve Saka, B.** (2010). Cosine Expansion Based Dierential Quadrature Algorithm for Numerical Solution of the RLW Equation, *Numer. Meth. Part. D. E.*, 26(3), 544-560.
- [35] **Korkmaz, A. ve Dağ, İ.** (2013). Numerical Simulations of Boundary-Forced RLW Equation with Cubic B-Spline-based Differential Quadrature Methods, *Arab. J. Sci. Eng.*, 38,1151-1160.
- [36] **El-Danaf, T.S., Ramadan, M.A. ve Alaal, F.E.I.A.** (2005). The use of adomian decomposition method for solving the regularized long-wave equation, *Chaos, Solitons and Fractals*, 26, 747-757.
- [37] **Doğan, A.** (2001). Numerical solution of regularized long wave equation using Petrov-Galerkin method, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 17, 485-494
- [38] **Hassan, H.N. ve Saleh, H.K.** (2010). The Solution of the Regularized Long Wave Equation Using the Fourier Leap-Frog Method, *Zeitschrift für Naturforschung A*, 65(4), 268-276.
- [39] **Hozman, J. ve Lamac, J.** (2013). Analysis and application of the discontinuous Galerkin method to the RLW equation, *Bound. Value Probl.*, 2013:116.
- [40] **Bakodah, H.O. ve Banaja, M.A.** (2013). The Method of Lines Solution of the Regularized Long-Wave Equation Using Runge-Kutta Time Discretization Method, *Math. Probl. Eng.*, 1-8.
- [41] **Fang, Z. ve Li, H.** (2013). Numerical solutions to regularized long wave equation based on mixed covolume method, *Appl. Math. Mech. -Engl. Ed.*, 34(7), 907-920.
- [42] **Bulut, F., Oruç, ve Esen, A.** (2022). Higher order Haar wavelet method integrated with strang splitting for solving regularized long wave equation, *Math. Comput. Simul.*, 197, 277-290.
- [43] **Kutluay, S. ve Esen, A.** (2006). A finite diference solution of the regularized long-wave equation, *Math. Probl. Eng.*, 85743.
- [44] **Lin, J., Xie, Z. ve Zhou, J.** (2007). High-order compact difference scheme for the regularized long wave equation, *Commun. Numer. Meth. Engng.*, 23, 135-156.
- [45] **Cai, J.** (2011). Some linearly and non-linearly implicit schemes for the numerical solutions of the regularized long-wave equation, *Appl. Math. Comput.*, 217, 9948-9955.
- [46] **Yalvaç, Ş.** (2016). Düzenli Uzun Dalga (RLW) Denkleminin Sonlu Fark Yöntemleri ile Çözümleri, *Yüksek Lisans Tezi*, İnönü Üniversitesi, Malatya.
- [47] **Ghiloufi, A., Rouatbi, A. ve Omrani, K.** (2018). A new conservative fourth-order accurate difference scheme for solving a model of nonlinear dispersive equations, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 41,5230-5253
- [48] **Hu, J.S., Li, J.J. ve Wang, X.** (2019). New High-Order Conservative Difference Scheme for Regularized Long Wave Equation with Richardson Extrapolation, *Therm. Sci.*, 23(3), S737-S745.
- [49] **Stewart, J.** (2007). Kalkülüs: Diferansiyel ve İntegral Hesap, *TÜBA Yayınları*, Ankara.
- [50] **Burden, L.R. ve Faires, J.D.** (2005). Numerical Analysis, *Thomson Brooks/Cole*, USA.

- [51] **Özışık, M.N.** (1994). Finite Difference Methods in Heat Transfer, *CRC Press*.
- [52] **Smith, G.D.** (1985). Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods, *Clarendon Press*, Oxford.
- [53] **Ross, S.L.** (1984). Differential Equations, Third Edition, *John Willey and Sons. Inc.*, New York.
- [54] **Lapidus, L. ve Pinder, G.F.** (1999). Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering, *John Wiley and Sons*.
- [55] **Ablowitz, M.J. ve Clarkson, P.A.** (2003). Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering, *Cambridge University Press*, Cambridge.
- [56] **Olver, P.J.** (1979). Euler operators and conservation laws of the BBM equation, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 85, 143-160.
- [57] **Doğan, A.** (1997). Petrov-Galerkin Finite Element Methods, Bangor University.
- [58] **Zaki, S.İ.** (2001). Solitary waves of the splitted RLW equation, *Comput. Phys. Commun.*, 138, 80-91.
- [59] **Rashidinia, J. ve Rasoulizadeh, M.N.** (2019). Numerical methods based on radial basis function-generated finite difference (RBF-FD) for solution of GKdVB equation, *Wave Motion*, 90, 152-167.
- [60] **Rubin, S.G. ve Graves, R.A.** (1975). Cubic spline approximation for problems in fluid mechanics, *NASA TR R-436*, Washington, DC.
- [61] **Aydın, Ş.** (2007). Düzenli Uzun Dalganın (RLW) Nümerik Çözümü, *Yüksek Lisans Tezi*, Niğde Üniversitesi, Niğde.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad: Damla ÖZÇELİK

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2012, İnönü Üniversite, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

MESLEKİ DENEYİMLER:

- 2015'ten beri Milli Eğitim Bakanlığı'nda Matematik öğretmeni olarak çalışmaktadır.

YÜKSEK LİSANS TEZİNDEN TÜRETİLEN ÇALIŞMALAR (Makaleler, Bildiriler, Patentler v.b.)

- **Özer, S., Uçar, Y., Özçelik, D. 2024.** A Study on Numerical Solution of the Regularized Long Wave Equation, 8th International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences (CMES-2024), 17-19 May 2024, Şanlıurfa, Türkiye.