

**T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GENELLEŞTİRİLMİŞ EŞİT GENİŞLİKLİ DALGA (GEW)
DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ İÇİN CRANK-NICOLSON
SONLU FARK ŞEMASI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hacer SARIBAŞ

Matematik Ana Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Yusuf UÇAR

HAZİRAN 2025

**T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GENELLEŞTİRİLMİŞ EŞİT GENİŞLİKLİ DALGA (GEW)
DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ İÇİN CRANK-NICOLSON
SONLU FARK ŞEMASI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Hacer SARIBAŞ
(36223614006)**

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Yusuf UÇAR

HAZİRAN 2025

**İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ**

**GENELLEŞTİRİLMİŞ EŞİT GENİŞLİKLİ DALGA (GEW)
DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ İÇİN CRANK-
NICOLSON SONLU FARK ŞEMASI**

**Tezi Hazırlayan: Hacer SARIBAŞ
Yüksek Lisans Tezi**



TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının her aşamasında yardım, öneri, bilgi, tecrübe ve desteklerini esirgemedi beni her konuda yönlendiren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Yusuf UÇAR'a, ders ve tez aşamasında bilgi, tecrübe ve önerilerini paylaşan, moral ve motivasyon olarak çok destek olan hocam Sayın Prof. Dr. Emine Nesligül AKSAN'a, tezin yazım ve düzenleme aşamasındaki yardım ve desteklerinden dolayı Sayın hocalarım Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY, Prof. Dr. Alaattin Esen, Prof. Dr. Nuri Murat Yağmurlu, Prof. Dr. Berat KARAAĞAÇ ve Doktora öğrencisi Hatice YILDIRIM'a, yüksek lisans sürecinde bana moral veren ve gerekli enerjiyi sağlayan değerli eşim Lütfi SARIBAŞ'a, sevgili çocuklarım Ahmet Alp ve Almila'ya, okuma ve öğrenme sevgime her zaman destek veren tüm aileme ayrıca birlikte çalıştığım mesai arkadaşlarıma teşekkür ederim.

ONUR SÖZÜ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum “Genelleştirilmiş Eşit Genişlikli Dalga (GEW) Denkleminin Nümerik Çözümü için Crank-Nicolson Sonlu Fark Şeması” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Hacer SARIBAŞ



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ	i
ONUR SÖZÜ	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	viii
SEMBOLLER VE KISALTMALAR	ix
ÖZET	x
ABSTRACT	xi
1. GİRİŞ	1
2. KLASİK SONLU FARK YÖNTEMLERİ.....	5
2.1 Sonlu Fark Yöntemlerine Giriş	5
2.1.1 Rubin-Graves Lineerleştirme Yaklaşımı	7
2.1.2 Richtmyer Lineerleştirme Yaklaşımı.....	8
2.1.3 Kararlılık Analizi	9
2.1.4 Lokal Kesme Hatası.....	10
2.1.5 Tutarlılık	10
2.1.6 Kararlılık.....	10
2.1.7 Yakınsaklık	11
2.1.8 Lax'ın Denklik Teoremi	11
3. GENELLEŞTİRİLMİŞ EŞİT GENİŞLİKLİ DALGA (GEW)	
DENKLEMİ.....	12
3.1 GEW Denklemi ile İlgili Yapılan Çalışmalar.....	12
3.2 Model Problemler	14
Problem 1: Tek soliter dalga hareketi.....	15
Problem 2: İki soliter dalganın etkileşimi.....	16
Problem 3: Maxvellian başlangıç şartlı dalga hareketi.....	16
4. GEW DENKLEMİNİN CRANK-NICOLSON SONLU FARK	
YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ	17
4.1 Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi-I (CNSFY-I)	17
4.2 Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi-II (CNSFY-II)	20
4.3 Şemanın Lokal Kesme Hatası	22
4.4 Kararlılık Analizi.....	25
4.5 Nümerik Sonuçlar.....	27
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	66
KAYNAKLAR.....	70
ÖZGEÇMİŞ	74

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1: Tek soliter dalgaının $p = 2$ için $t = 20$ zamanında, farklı A , h ve k değerleri için CNSFY-I ile elde edilen hata normları.	27
Çizelge 4.2: Tek soliter dalgaının $p = 2$ için $t = 20$ zamanında, farklı A , h ve k değerleri için CNSFY-II ile elde edilen hata normları.	28
Çizelge 4.3: Tek soliter dalgaının CNSFY-I ile farklı t zamanlarda elde edilen korunum sabitleri ve hata normları ($p = 2$, $c = 1/32$, $A = 0.25$, $h = 0.1$, $k = 0.2$)	29
Çizelge 4.4: Tek soliter dalgaının CNSFY-II ile farklı t zamanlarda elde edilen korunum sabitleri ve hata normları ($p = 2$, $c = 1/32$, $A = 0.25$, $h = 0.1$, $k = 0.2$)	29
Çizelge 4.5: Tek soliter dalgaının CNSFY-I ve CNSFY-II ile $t = 20$ 'de elde edilen sonuçlarının diğer çalışmalardaki sonuçlar ile karşılaştırılması ($p = 2$, $c = 1/32$, $A = 0.25$, $h = 0.1$, $k = 0.2$).....	29
Çizelge 4.6: Tek soliter dalgaının CNSFY-I ile farklı t zamanlarda elde edilen korunum sabitleri ve hata normları ($p = 2$, $c = 1/2$, $A = 1$).....	30
Çizelge 4.7: Tek soliter dalgaının CNSFY-II ile farklı t zamanlarda elde edilen korunum sabitleri ve hata normları ($p = 2$, $c = 1/2$, $A = 1$).....	30
Çizelge 4.8: Tek soliter dalgaının CNSFY-I ve CNSFY-II ile elde edilen sonuçlarının diğer çalışmalardaki sonuçlar ile karşılaştırılması ($p = 2$, $c = 1/2$, $A = 1$, $t = 20$).	31
Çizelge 4.9: Tek soliter dalgaının $p = 3$ için $t = 20$ zamanında, farklı A , h ve k değerleri için CNSFY-I ile elde edilen hata normları.	33
Çizelge 4.10: Tek soliter dalgaının $p = 3$ için $t = 20$ zamanında, farklı A , h ve k değerleri için CNSFY-II ile elde edilen hata normları.	34
Çizelge 4.11: Tek soliter dalgaının CNSFY-I ile farklı t zamanlarda elde edilen korunum sabitleri ve hata normları ($p = 3$, $c = 0.001$, $A = 0.15$).....	35
Çizelge 4.12: Tek soliter dalgaının CNSFY-II ile farklı t zamanlarda elde edilen korunum sabitleri ve hata normları ($p = 3$, $c = 0.001$, $A = 0.15$).....	35
Çizelge 4.13: Tek soliter dalgaının CNSFY-I ve CNSFY-II ile elde edilen sonuçlarının diğer çalışmalardaki sonuçlar ile karşılaştırılması ($p = 3$, $c = 0.001$, $A = 0.15$, $t = 20$).	35
Çizelge 4.14: Tek soliter dalgaının CNSFY-I ile farklı t zamanlarda elde edilen korunum sabitleri ve hata normları ($p = 3$, $c = 0.3$, $A = 1$).....	36

Çizelge 4.15: Tek soliter dalganın CNSFY-II ile farklı t zamanlarda elde edilen korunum sabitleri ve hata normları ($p = 3, c = 0.3, A = 1$).	36
Çizelge 4.16: Tek soliter dalganın CNSFY-I ve CNSFY-II ile elde edilen sonuçlarının diğer çalışmalardaki sonuçlar ile karşılaştırılması ($p = 3, c = 0.3, A = 1, t = 20$).	37
Çizelge 4.17: Tek soliter dalganın CNSFY-I ile farklı t zamanlarda elde edilen korunum sabitleri ve hata normları ($p = 4, c = 0.2, A = 1$).	37
Çizelge 4.18: Tek soliter dalganın CNSFY-II ile farklı t zamanlarda elde edilen korunum sabitleri ve hata normları ($p = 4, c = 0.2, A = 1$).	38
Çizelge 4.19: Tek soliter dalganın CNSFY-I ve CNSFY-II ile elde edilen sonuçlarının diğer çalışmalardaki sonuçlar ile karşılaştırılması ($p = 4, c = 0.2, A = 1, t = 20$).	38
Çizelge 4.20: Tek soliter dalganın CNSFY-I ile $p = 2,3,4, t = 20$ ve $x \in [0,80]$ için farklı c ve A değerlerinde elde edilen hata normları.	39
Çizelge 4.21: Tek soliter dalganın CNSFY-II ile $p = 2,3,4, t = 20$ ve $x \in [0,80]$ için farklı c ve A değerlerinde elde edilen hata normları.	39
Çizelge 4.22: Tek soliter dalganın CNSFY-I ile $p = 6,8,10, t = 20$ ve $x \in [0,80]$ için farklı c ve A değerlerinde elde edilen hata normları.	39
Çizelge 4.23: Tek soliter dalganın CNSFY-II ile $p = 6,8,10, t = 20$ ve $x \in [0,80]$ için farklı c ve A değerlerinde elde edilen hata normları.	39
Çizelge 4.24: $p = 2, c = 1/32$ ve $A = 0.25$ değerleri için farklı t zamanlarında CNSFY-I ile elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları ile yakınsaklık mertebesi	40
Çizelge 4.25: $p = 2, c = 1/32$ ve $A = 0.25$ değerleri için farklı t zamanlarında CNSFY-II ile elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları ile yakınsaklık mertebesi	41
Çizelge 4.26: İki soliter dalganın CNSFY-I ile hesaplanan korunum sabitleri ($p = 2, c_1 = 0.5, c_2 = 0.125, x_1 = 15, x_2 = 30, x \in [0,80], h = 0.1, h = 0.05$ ve $k = 0.025, A_1 = 1, A_2 = 0.5, t = 0 (10) 60$).	42
Çizelge 4.27: İki soliter dalganın CNSFY-II ile hesaplanan korunum sabitleri ($p = 2, c_1 = 0.5, c_2 = 0.125, x_1 = 15, x_2 = 30, x \in [0,80], h = 0.1, h = 0.05$ ve $k = 0.025, A_1 = 1, A_2 = 0.5, t = 0 (10) 60$).	44
Çizelge 4.28: İki soliter dalganın CNSFY-I ve CNSFY-II ile elde edilen korunum sabitlerinin diğer çalışmalardaki sonuçlar ile karşılaştırılması ($p = 2, c_1 = 0.5, c_2 = 0.125, A_1 = 1, A_2 = 0.5, t = 60$).	44

Çizelge 4.29: İki soliter dalgaının CNSFY-I ile hesaplanan korunum sabitleri ($p = 3$, $c_1 = 0.3, c_2 = 0.0375, x_1 = 15, x_2 = 30, h = 0.1, h = 0.05, k = 0.025, A_1 =$ $1, A_2 = 0.5, t = 0 (10) 100)$	45
Çizelge 4.30: İki soliter dalgaının CNSFY-II ile hesaplanan korunum sabitleri ($p =$ $3, c_1 = 0.3, c_2 = 0.0375, x_1 = 15, x_2 = 30, h = 0.1, h = 0.05, k = 0.025,$ $A_1 = 1, A_2 = 0.5, t = 0 (10) 100)$	45
Çizelge 4.31: İki soliter dalgaının farklı zamanlarda CNSFY-I ve CNSFY-II ile elde edilen korunum sabitlerinin diğer çalışmalardaki sonuçlar ile karşılaştırması ($p =$ $3, c_1 = 0.3$ ve $c_2 = 0.0375, A_1 = 1, A_2 = 0.5)$	48
Çizelge 4.32: İki soliter dalgaının CNSFY-I ile için hesaplanan korunum sabitleri ($p =$ $4, c_1 = 0.2, c_2 = 180, x_1 = 15, x_2 = 30, x \in [0,80], h = 0.1, h = 0.05$ ve $k =$ $0.025, A_1 = 1, A_2 = 0.5, t = 0 (10) 120)$	49
Çizelge 4.33: İki soliter dalgaının CNSFY-II ile elde edilen korunum sabitleri ($p =$ $4, c_1 = 0.2, c_2 = 180, x_1 = 15, x_2 = 30, x \in [0,80], h = 0.1, h =$ 0.05 ve $k = 0.025, A_1 = 1, A_2 = 0.5, t = 0 (10) 120)$	49
Çizelge 4.34: İki soliter dalgaının CNSFY-I ve CNSFY-II ile elde edilen korunum sabitlerinin diğer çalışmalardaki sonuçlar ile karşılaştırılması ($p = 4, c_1 =$ $0.2, c_2 = 180, A_1 = 1$ ve $A_2 = 0.5)$	52
Çizelge 4.35: Maxvellian başlangıç şartlı problemin CNSFY-I ve CNSFY-II ile elde edilen korunum sabitleri ($p = 2, h = 0.025, k = 0.01, x \in [-20,20], \mu =$ $0.01, 0.025, 0.05, 0.1)$	53
Çizelge 4.36: Maxvellian başlangıç şartlı problemin CNSFY-I ve CNSFY-II ile elde edilen korunum sabitleri ($p = 3, h = 0.025, k = 0.01$ ve $x \in [-20,20], \mu =$ $0.01, 0.025, 0.05, 0.1)$	55
Çizelge 4.37: Maxvellian başlangıç şartlı problemin CNSFY-I ve CNSFY-II ile elde edilen korunum sabitleri ($p = 4, h = 0.025, k = 0.01$ ve $x \in [-20,20], \mu =$ $0.01, 0.025, 0.05, 0.1)$	57
Çizelge 4.38: Maxvellian başlangıç şartlı problemin CNSFY-I ile elde edilen korunum sabitleri ($p = 5, h = 0.025, k = 0.01, x \in [-20,20], \mu = 0.01, 0.025,$ $0.05, 0.1)$	59
Çizelge 4.39: Maxvellian başlangıç şartlı problemin CNSFY-I ve CNSFY-II ile edilen korunum sabitlerinin diğer çalışmalardaki sonuçlar ile karşılaştırılması ($h =$ $0.1, k = 0.01, \mu = 0.01$ ve $x \in [-20,20])$	61

Çizelge 4.40: Maxvillian başlangıç şartlı problemin CNSFY-I ve CNSFY-II ile elde edilen korunum sabitlerinin diğer çalışmalardaki sonuçlar ile karşılaştırılması ($h = 0.1, k = 0.01, \mu = 0.025$ ve $x \in [-20,20]$).....	62
Çizelge 4.41: Maxvillian başlangıç şartlı problemin CNSFY-I ve CNSFY-II ile elde edilen korunum sabitlerinin diğer çalışmalardaki sonuçlar ile karşılaştırılması ($h = 0.1, k = 0.01, \mu = 0.025$ ve $x \in [-20,20]$).....	63
Çizelge 4.42: Maxvillian başlangıç şartlı problemin CNSFY-I ve CNSFY-II ile elde edilen korunum sabitlerinin diğer çalışmalardaki sonuçlar ile karşılaştırılması ($h = 0.1, k = 0.01, \mu = 0.1$ ve $x \in [-20,20]$).....	64
Çizelge 5.1: Tek soliter dalğanın CNSFY-I ve CNSFY-II ile hesaplanan hata normları ($p = 2,3,4,6,8,10, h = 0.05, k = 0.05$ ve $t = 20$).....	67
Çizelge 5.2: İki soliter dalğanın CNSFY-I ve CNSFY-II ile hesaplanan korunum sabitleri ve değişim oranları ($h = 0.05, k = 0.05, p = 2,3,4$).....	68
Çizelge 5.3: Maxvillian başlangıç şartlı problemin CNSFY-I ve CNSFY-II ile hesaplanan korunum sabitlerinin değişimi($h = 0.05, k = 0.05, p = 2,3,4, \mu = 0.01, 0.025, 0.05, 0.1$ ve $t = 12$).	69

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1-1: Basit bir dalga görüntüsü	2
Şekil 2-1: Düğüm Noktalarının Gösterimi	5
Şekil 4-1: CNSFY-I :Tek soliter dalganın hareketi ($p = 2, c = 1/2, A = 1$)	31
Şekil 4-2: CNSFY-I :Tek soliter dalganın arkasında bıraktığı zayıf iz dalgaları ($p = 2, c = 1/2, A = 1$ ve $t = 20$)	32
Şekil 4-3: CNSFY-I: Tek soliter dalga hareketi ($p = 3, c = 0.3, A = 1$)	36
Şekil 4-4: CNSFY-I : Tek soliter dalga hareketi ($p = 4, c = 0.2, A = 1$)	38
Şekil 4-5: CNSFY-I: İki soliter dalganın etkileşimi ($p = 2, c_1 = 0.5, c_2 = 0.125, A_1 = 1, A_2 = 0.5$)	44
Şekil 4-6: CNSFY-I: İki soliter dalganın etkileşimi ($p = 3, c_1 = 0.3, c_2 = 0.0375, A_1 = 1, A_2 = 0.5$)	48
Şekil 4-7: CNSFY-I: İki soliter dalganın etkileşimi ($p = 4, c_1 = 0.2, c_2 = 1/80, A_1 = 1, A_2 = 0.5$)	51
Şekil 4-8: CNSFY-I: Maxvillian başlangıç şartlı dalga hareketi ($p = 2, h = 0.025$ ve $t = 12$)	55
Şekil 4-9: CNSFY-I: Maxvillian başlangıç şartlı dalga hareketi ($p = 3, h = 0.025$ ve $t = 12$)	57
Şekil 4-10: CNSFY-I: Maxvillian başlangıç şartlı dalga hareketi ($p = 4, h = 0.025$ ve $t = 12$)	59
Şekil 4-11: CNSFY-I: Maxvillian başlangıç şartlı dalga hareketi ($p = 5, h = 0.025$ ve $t = 12$)	61

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

EW	Eşit Genişlikli Dalga
MEW	Modifiye Edilmiş Eşit Genişlikli Dalga
GEW	Genelleştirilmiş Eşit Genişlikli Dalga
KDV	Korteweg-de Vries
BBM	Benjamin-Bona-Mahony
RLW	Düzenli Uzun Dalga
MRLW	Modifiye Edilmiş Düzenli Uzun Dalga
U^{num}	Yaklaşık Çözüm
I_1	Kütle Korunum Sabiti
I_2	Momentum Korunum Sabiti
I_3	Enerji Korunum Sabiti
L_2	Ortalama Kare Hata Normu
L_∞	Maksimum Hata Normu

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Genelleştirilmiş Eşit Genişlikli Dalga (GEW) Denkleminin Nümerik Çözümü için Crank-Nicolson Sonlu Fark Şeması

HACER SARIBAŞ

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

74+XI sayfa

2025

Danışman: Prof. Dr. YUSUF UÇAR

Genelleştirilmiş Eşit Genişlikli Dalga (GEW) Denkleminin nümerik çözümlerinin bulunmasını amaçlayan bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır.

Tezin giriş bölümünde dalga kavramı ve dalga denklemleri hakkında kısaca bahsedildi.

İkinci bölümde tezde kullanılan sonlu fark yöntemleri, Rubin-Graves ve Richtmyer lineerleştirme teknikleri, von Neumann kararlılık analizi, lokal kesme hatası, kararlılık, tutarlılık, yakınsaklık tanımları ve Lax'ın denklik teoremi sunuldu.

Üçüncü bölümde GEW denkleminin literatür taraması ayrıntılı olarak yapıldı. Ayrıca Tek soliter dalga hareketi, İki soliter dalga etkileşimi ve Maxwellian başlangıç şartlı dalga hareketi olmak üzere üç model problem tanıtıldı.

Dördüncü bölümde GEW denklemindeki lineer olmayan terim yerine sırasıyla Rubin-Graves ve Richtmyer lineerleştirme teknikleri ile birlikte Crank-Nicolson sonlu fark yönteminin uygulanmasıyla CNSFY-I ve CNSFY-II olarak adlandırılan şemalar elde edildi. Yine aynı bölümde bu denklem için Crank-Nicolson sonlu fark şemasının lokal kesme hatası ve kararlılık analizi verildikten sonra yukarıda bahsedilen üç model probleme CNSFY-I ve CNSFY-II şemalarının uygulanmasıyla elde edilen nümerik çözümlerin mevcut tam çözüm ve literatürdeki diğer çalışmalardaki nümerik çözümler ile karşılaştırılması çizelgelerde sunuldu. Ayrıca model problemlerin davranışlarını gözlemlemek amacıyla parametrelerin bazı özel seçimleri için şekiller sunuldu.

Tezin son bölümünde CNSFY-I ve CNSFY-II ile elde edilen nümerik sonuçlar birbiri ile karşılaştırılarak değerlendirildi.

Anahtar Kelimeler: Genelleştirilmiş Eşit Genişlikli Dalga (GEW) Denklemi, Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi, Rubin-Graves Lineerleştirme, Richtmyer Lineerleştirme, Lokal Kesme Hatası, Kararlılık Analizi.

ABSTRACT

Master Thesis

Crank-Nicolson Finite Difference Scheme for Numerical Solution of
Generalized Equal Width Wave (GEW) Equation

HACER SARIBAŞ

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of MATHEMATICS

74+XI sayfa

2025

Supervisor: Prof. Dr. YUSUF UÇAR

This thesis study, which aims to find numerical solutions of the Generalized Equal Width Wave (GEW) Equation, consists of five chapters.

In the introduction chapter of the thesis, the concept of wave and wave equations are briefly mentioned.

In the second chapter, the finite difference methods used in the thesis, Rubin-Graves and Richtmyer linearization techniques, von Neumann stability analysis, local truncation error, stability, consistency, convergence definitions and Lax's equivalence theorem are presented.

In the third chapter, the literature review of the GEW equation is made in detail. In addition, three model problems are introduced: Single solitary wave motion, two solitary wave interaction and Maxwellian initial condition wave motion.

In the fourth chapter, instead of the nonlinear term in the GEW equation, the schemes called CNSFY-I and CNSFY-II are obtained by applying the Rubin-Graves and Richtmyer linearization techniques, respectively, together with the Crank-Nicolson finite difference method. Again in the same chapter, after giving the local truncation error and stability analysis of the Crank-Nicolson finite difference scheme for this equation, the comparison of the numerical solutions obtained by applying the CNSFY-I and CNSFY-II schemes to the three model problems mentioned above with the existing exact solution and the numerical solutions in other studies in the literature is presented in the tables. In addition, figures are presented for some special selections of parameters in order to observe the behavior of the model problems.

In the last chapter of the thesis, the numerical results obtained with CNSFY-I and CNSFY-II are compared with each other and their evaluations are made.

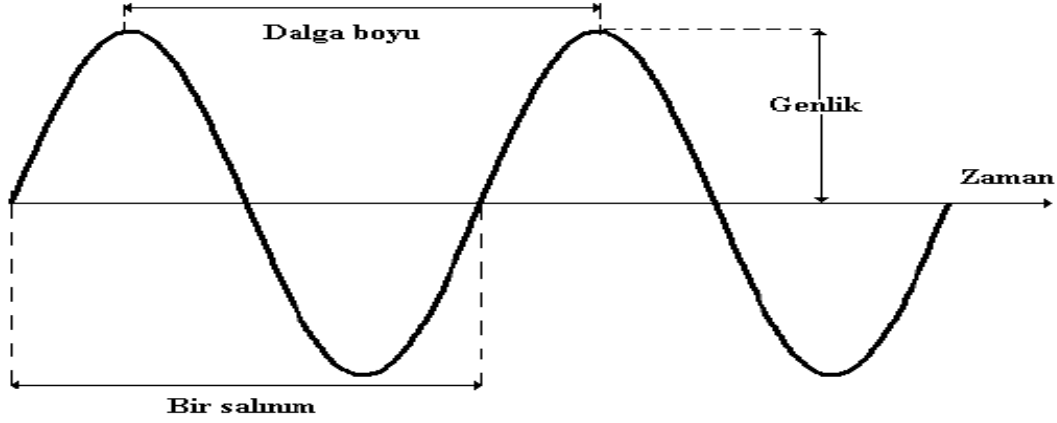
Keywords: Generalized Equal Width Wave (GEW) Equation, Finite Difference Method, Crank-Nicolson Finite Difference Method, Richtmyer Linearization Technique, Rubin-Graves Linearization Technique, Local Truncation Error, Stability Analysis.

1. GİRİŞ

Matematik, fizik ve mühendislik gibi bilim dallarında çalışan bilim araştırmacıları doğada meydana gelen fiziksel olayları genellikle lineer ve lineer olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemler (KDD) yardımıyla modeller. Lineer olmayan KDD'in analitik çözümünü bulmak çoğu zaman kolay değildir. Bu yüzden, bu tür denklemlerin çözümü için nümerik çözüm yöntemleri kullanılır. Nümerik çözüm yöntemleri 20. yy başlarında kullanılmaya başlanmış ve sonrasında gelişen teknoloji ve bilgisayar çağı bu yöntemlerin daha da gelişmesine olanak sağlamıştır.

Lineer ve lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde diğer pek çok nümerik yöntemlere göre uygulanması ve programlanması daha kolay olan sonlu fark yöntemleri tercih edilir. Mevcut çalışmalarda en çok kullanılan sonlu fark yöntemleri klasik sonlu farklar olarak bilinen Açık, Kapalı ve Crank-Nicolson sonlu fark yöntemidir. Bu yöntemler arasında Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi açık ve kapalı sonlu fark yöntemlerinin averajını kullandığından araştırmacılar tarafından oldukça tercih edilmektedir. Bu tez çalışmasında Genelleştirilmiş Eşit Genişlikli Dalga (GEW) Denkleminin sayısal çözümü için denklemden görülen non-lineer terimleri Rubin-Graves ve Richtmyer tipi lineerleştirme teknikleri yardımıyla lineerleştiren Crank-Nicolson tipi bir sonlu fark yaklaşımı verilecektir.

Şemanın elde edilmesine geçmeden önce dalga ile ilgili bazı kavramlar verildi. Doğadaki maddelerin tamamı taneciklerden oluşur, bu taneciklerin birbiri ile ileri, geri, aşağı, yukarı yönlü titreşim hareketlerinin yakındaki taneciklere düzenli olarak aktarılması **dalga** oluşturur (Şekil 1.1).



Şekil 1-1: Basit bir dalga görüntüsü [1]

Dalganın oluşabilmesi için kuvvet uygulayarak enerji veren bir kaynak gereklidir. Suya bir taş atıldığında taşın suya girdiği yerin etrafında dairesel bir hareket oluşur. İşte bu hareket dalga hareketidir. Buradaki kaynak taşın potansiyel enerjisidir, taşın potansiyel enerjisi suda iletilip kinetik enerji olarak taşınmıştır. Dalgaların yol açtığı titreşimin doğrultuya göre enine ve boyuna dalgalar, taşınan enerji türüne göre mekanik veya elektromanyetik dalgalar olarak sınıflandırılır. Enine titreşim dalgaları dik doğrultuda salınım yaparlarken boyuna dalgalar titreşim doğrultusuyla aynı yönde salınım yaparlar. Ses dalgaları boyuna dalgalara örnek verilirken elektromanyetik dalgalar enine dalgadır [2].

Günümüzde en çok konu olan hayatımızın bir parçası deprem dalgaları ise hem enine hem boyuna dalgadır. Dalgalar yayılmak için bir maddesel ortama ihtiyaç duyuyorsa mekanik dalgadır. Örneğin; ses, yay, deprem, su, mekanik dalgalar sınıfına girer. Dalgalar yayılmak için bir ortama ihtiyaç duymuyorsa bu tip dalgalar elektromanyetik dalgalar sınıfına girer. İletişim için kullandığımız telefon vericileri, radyo, uydu, röntgen cihazlarının ürettiği dalgalar elektromanyetik dalgalara örnekler [2].

Su dalgaları için dalga uzunluğu yani genlik suyun derinliğinden daha kısa ise derin su, aksi durumda ise sığ su olarak nitelendirilir. Bir dalga yayılırken şekil, büyüklük ve grup hızı değişiklik göstermiyorsa bu dalgalar soliter dalga olarak isimlendirilir. Soliton dalgalar ise soliter dalgaların gösterdiği tüm özellikleri gösterip buna ek olarak soliton dalgalar çarpıştıktan sonra kendi özelliklerini koruyan lineer olmayan dalgalardır [1]. Nitekim bu tez çalışmasına ışık veren Korteweg de Vries (KDV) denklemi su dalgalarının gözlemlenmesi

ile ortaya çıkmıştır. İskoç bir Mühendis olan J. Scott Russell 1834 yılında soliton dalgayı ilk keşfetmesini şöyle anlatır:

“Ben dar bir kanaldan geçmekte olan ve iki beygir gücüyle giden bir botun hareketini gözlüyordum. Aniden bot durdu. Kanaldaki hareketli su kütlelerinin durmadığını gördüm. Bu su kütlesi botun uç kısmında birikti ve sonra da aniden arkaya doğru yayılmaya başladı ve büyük bir hızla tek başına bir dalganın ön tarafa doğru geldiğini fark ettim. Bu su kütlelerinin hızının azalmadan ve şeklini kaybetmeden ilerlemeye devam ettiğini gözlemledim. Atın sırtında olmama rağmen onu takip ettim, yetiştiğimde ise 8-9 mil hızla ilerlediğini fark ettim. Ancak 1-2 mil sonra kanalın dönüşünde kaybettim.”

Russell bu olaydan sonra bu dalgaya “büyük translasyon dalgası” adını vermiştir [3]. 1844’te yayınladığı “Report on waves” bildirisinde soliter dalganın önemini vurgulamıştır. Soliter dalga doğrusal olmayan bir dalgadır, şeklini ve hızını kaybetmeden ilerleyebilir ve çarpışma anında ya da sonrasında kendi özelliklerini korur, $h \operatorname{sech}^2(k(x - vt))$ yapısındadır. Su kütlesi yeteri miktarda büyükse ikiden fazla bağımsız soliter dalga üretebilir. Soliter dalgalar diğer dalgaların aksine birleşme özelliği göstermezler. Bunun yerine çarpışmadan sonra özelliklerini koruyarak yoluna devam edebilirler, uzun ömürlü ve kararlı dalgalardır. Russell soliter dalgaların kendine ait bir dinamizmi olduğunu savunur[3]. 1847 yılında Stokes, 1872 yılında Boussinesq gibi bir çok matematikçi çalışmalarında bu dalgalara yer vermiştir. Russell’ın soliter dalgayı keşfetmesinden 60 yıl sonra 1895 yılında sığ sulardaki soliter dalgaların profilini gözlemleyen ve konu hakkındaki ilk teorik çalışmaları yapan Alman matematikçi Korteweg ve öğrencisi de Vries olmuştur. Korteweg ve de Vries sığ sulardaki tek yönde ilerleyen dalgaların oluşumuna dair bir denklem ortaya koymuşlardır. Bu denklemin soliter dalga çözümleri bulunmuş, günümüzde KdV denklemi olarak bilinen;

$$U_t + \varepsilon U U_x - \mu U_{xxx} = 0$$

denklem ortaya çıkmıştır [4]

Zabusky ve Kruskal [5], KdV denklemi üzerinde detaylı araştırmalar yaparak tekil dalga özelliklerini anlamaya çalışmışlardır ve nümerik çözümler bularak bu çözümlerin davranışları hakkında önemli açıklamalarda bulunmuşlardır. Bu çalışmalar sırasında çarpıştıktan sonra dalga formunu koruyan tekil dalgalar bulmuşlardır. Böylece yazarlar, sabit bir hızla hareket ederken etkileşime giren ancak dalga formunu koruyarak kendi kendini güçlendiren tekil dalgaları “soliton” olarak adlandırmışlardır.

Alternatif bir model oluşturmak için 1972'de Benjamin vd. [6] tarafından bir çalışma yapılmıştır. Bu çalışma sonucunda KdV denklemi geliştirilerek Benjamin-Bona-Mahony (BBM) ya da bir diğer adıyla Düzenli Uzun Dalga denklemi olarak isimlendirilen

$$U_t + U_x + UU_x - U_{xxt} = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}$$

biçimindeki yeni bir denklem oluşturulmuştur.

Bu denklem KdV denkleminin sığ su dalgaları için düzenlenmiş halidir. BBM denklemi, bazı şartlar altında, bir-boyutlu iletken dalgaların modelini de sağlar. BBM denklemi daha sonra Düzenli Uzun Dalga (RLW) denklemi olarak isimlendirilmiştir. Peregrine, ardışık dalgaları çözümleyebilmek için RLW denklemini önermiş ve ilk sayısal çözümlerini sonlu fark yöntemi kullanarak elde etmiştir [7].

Morrison vd. [8], Eşit Genişlikli Dalga (EW) denklemini sunmuş, KdV ve RLW denklemleri ile benzer fiziksel olayları modellediğini göstermişlerdir.

Başlangıçta, EW denkleminin integrallenebilir ve elastiki dalga etkileşimlerini içerdiği sanılıyordu ancak bu yanılının sebebi, eksik veya düşük çözünürlüklü sayısal yöntemin hesaplamalarından ve elastik olmayan dalga etkileşimlerinin küçük etkilerinin göz ardı edilmesidir. Soliter dalganın zamanla nasıl bozulduğu ve zayıf iz dalgaları (weak trailing waves) bırakması açıkça anlaşılamıyor veya sayısal olarak üretilmiş salınım olduğu düşünülüyordu. Daha sonra zayıf iz dalgalarının gözlenmesiyle bu yanılgı düzeltilmiştir [9].

Bu tez çalışmasında ele alınan Genelleştirilmiş Eşit Genişlikli Dalga (GEW) denklemi; EW denkleminin genelleştirilmiş halidir. Bu denklem;

$$U_t + \varepsilon U^p U_x - \mu U_{xxt} = 0$$

dir. Özel olarak, $p = 1$ için denklem;

$$U_t + \varepsilon U U_x - \mu U_{xxt} = 0$$

EW denklemi olarak isimlendirilir.

Bu tez çalışmasında;

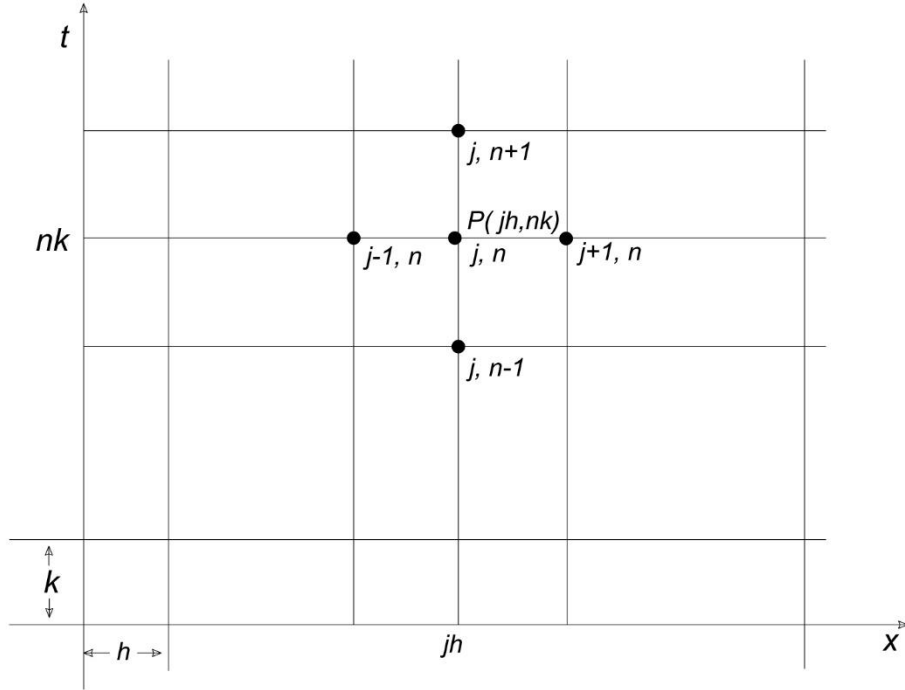
$$U_t + \varepsilon U^p U_x - \mu U_{xxt} = 0$$

Genelleştirilmiş Eşit Genişlikli Dalga (GEW) Denkleminin, lineer olmayan $U^p U_x$ terimi yerine iki farklı lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi ile nümerik çözümleri elde edildi.

2. KLASİK SONLU FARK YÖNTEMLERİ

2.1 Sonlu Fark Yöntemlerine Giriş

Lineer veya non-lineer KDD ile verilen bir başlangıç ve sınır değer probleminin nümerik çözümlerinde kullanılan sonlu fark yöntemlerinin esas prensibi şöyledir. Önce problemin çözüm bölgesi genellikle dikdörtgen ve kare şeklinde kafeslere bölünür (Şekil 2.1) ve denklemin yaklaşık çözümü kafesin her bir düğüm noktasından hesaplanır. Bu düğüm noktalarına mesh veya grid adı verilir. Sonra problemdeki türevler yerine uygun sonlu fark yaklaşımları yazılır ve sınır şartlarını kullanılmasıyla lineer veya non-lineer cebirsel denklem sistemiyle sonuçlanan bir nümerik şema bulunur. Daha sonra denklem sistemi literatürde mevcut direkt veya iteratif yöntemlerinden biri kullanılarak çözülür [10].



Şekil 2-1: Düğüm Noktalarının Gösterimi [11]

U, x ve t değişkenlerine bağlı bir fonksiyon olsun. $\Delta x (\equiv h)$, x yönünde konum adım uzunluğu; $\Delta t (\equiv k)$, t yönünde zaman adım uzunluğu olmak üzere, konum ve zaman koordinatları, x ve t sırasıyla;

$$\begin{aligned} x &= x_j = j\Delta x = jh, & j &= 0(1)J, & l &= Jh \\ t &= t_n = n\Delta t = nk, & n &= 0(1)N \end{aligned}$$

olarak gösterilir.

Temsili bir $P(jh, nk)$ düğüm noktası üzerinde U fonksiyonunun noktasal değeri,

$$U_p = U(x, t) = U(j\Delta x, n\Delta t) = U_j^n$$

ile gösterilir. Bu tez boyunca (x_j, t_n) grid noktasında tam çözüm için $U(x_j, t_n)$, yaklaşık nümerik çözüm için ise U_j^n gösterimleri kullanılacaktır. Buna göre $U_j^n \cong U(x_j, t_n)$ dir.

Taylor seri açılımından

$$U_{j+1}^n = U_j^n + h \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{6} h^3 \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \dots \quad (2.1)$$

$$U_{j-1}^n = U_j^n - h \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1}{6} h^3 \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \dots \quad (2.2)$$

olup U fonksiyonunun birinci ve ikinci mertebeden türevlerine h 'ye göre birinci mertebeden sonlu fark yaklaşımları

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{h} + O(h) \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{h} + O(h) \quad (2.4)$$

olarak elde edilir. Burada (2.3) eşitliğine x –değişkenine göre 1. mertebeden iki nokta ileri fark formülü ve (2.4) eşitliğine de iki nokta geri fark formülü denir. (2.1) denkleminde (2.2) denklemi çıkartılırsa

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h} + O(h^2) \quad (2.5)$$

elde edilir. (2.5) eşitliğine x –değişkenine göre 1. mertebeden üç nokta merkezi fark formülü denir. Benzer şekilde t – yönünde 1. mertebeden iki nokta ileri ve geri fark formülleri ;

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} + O(k) \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_j^n - U_j^{n-1}}{k} + O(k) \quad (2.7)$$

olarak bulunur. Yine Taylor seri açılımından,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_j^n - 2U_{j+1}^n + U_{j+2}^n}{h^2} + O(h) \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{j-2}^n - 2U_{j-1}^n + U_j^n}{h^2} + O(h) \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{j-1}^n - 2U_j^n + U_{j+1}^n}{h^2} + O(h^2) \quad (2.10)$$

x –yönünde 2. mertebeden türevler için sırasıyla üç nokta ileri fark formülü (2.8), geri fark formülü (2.9) ve merkezi fark formülü (2.10) elde edilir.

Verilen formüllerde kullanılan “ O ” ifadesi sonsuz terimli bir ifadenin sonlu terimle kesildiğini gösterir. Burada $O(h)$, $O(k)$ ve $O(h^2)$ terimlerine **kesme hatası** denir ve hatanın h ve k ile orantılı olarak değiştiğini gösterir. Verilen bir diferansiyel denklemin sonlu fark formunda ifade etmek için kullanılan yöntemler;

- Açık Sonlu Fark Yöntemi
- Kapalı Sonlu Fark Yöntemi
- Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi

dir. Bu yöntemler klasik sonlu fark yöntemleri olarak da adlandırılır [12].

2.1.1 Rubin-Graves lineerleştirme yaklaşımı [13]

Bu tez çalışmasında ele alınacak olan

$$U_t + \varepsilon U^p U_x - \mu U_{xxt} = 0$$

biçimindeki GEW denkleminin sonlu fark yöntemi yardımıyla konum ve zaman değişkenlerine göre ayrıklaştırılması sonucunda, fark denkleminde görülen $(n + 1)$. zaman adımındaki lineer olmayan $(U^p U_x)^{n+1}$ terimini lineerleştirmek için

$$(U^p U_x)^{n+1} = (U^p)^n (U_x)^{n+1} + p(U^{p-1})^n U_x^n U^{n+1} - p(U^p)^n U_x^n$$

olarak tanımlanan Rubin-Graves yaklaşımı kullanıldı. Bu yaklaşım Taylor seri açılımından kolayca bulunabilir Şöyle ki,

$$\begin{aligned} (U^p U_x)^{n+1} &= U^p U_x(x_j, t_n) + \frac{\partial}{\partial t} (U^p U_x) k + O(k^2) \\ &= U^p U_x(x_j, t_n) + k(p U^{p-1} U_t U_x + U^p U_{xt}) + O(k^2) \end{aligned}$$

olup $\frac{\partial U}{\partial t}$ yerine (2.6) da verilen ileri fark formülü yazılırsa $O(k^2)$ mertebeden Rubin-Graves lineerleştirme yaklaşımı;

$$\begin{aligned} (U^p U_x)^{n+1} &= U^p U_x(x_j, t_n) + k \left(p U^{p-1} U_x \left(\frac{U^{n+1} - U^n}{k} \right) + U^p \left(\frac{U_x^{n+1} - U_x^n}{k} \right) \right) \\ &\quad + O(k^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= U^p U_x(x_j, t_n) + p U^{p-1} U_x U^{n+1} - p U^{p-1} U_x U^n + U^p U_x^{n+1} - U^p U_x^n \\
&\quad + O(k^2) \\
&= (U^p U_x)^n + p (U^{p-1})^n U_x^n U^{n+1} - p (U^{p-1})^n U_x^n U^n + (U^p)^n U_x^{n+1} \\
&\quad - (U^p)^n U_x^n + O(k^2) \\
&= (U^p U_x)^n + p (U^{p-1})^n U_x^n U^{n+1} - p (U^p)^n U_x^n + (U^p)^n U_x^{n+1} - (U^p)^n U_x^n \\
&\quad + O(k^2) \\
&= (U^p)^n (U_x)^{n+1} + p (U^{p-1})^n U_x^n U^{n+1} - p (U^p)^n U_x^n + O(k^2)
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

2.1.2 Richtmyer lineerleştirme yaklaşımı [14]

Yine bu tez çalışmasında ele alınan

$$U_t + \varepsilon U^p U_x - \mu U_{xxt} = 0$$

GEW denklemi

$$U_t + \frac{\varepsilon}{p+1} (U^{p+1})_x - \mu U_{xxt} = 0$$

şeklinde düzenlenebilir. Bu denklemin sonlu fark yöntemi yardımıyla konum ve zaman değişkenlerine göre ayrıklaştırılması sonucunda fark denkleminde görülen $(n+1)$. zaman adımındaki lineer olmayan $(U^{p+1})_j^{n+1}$ terimini lineerleştirmek için

$$(U^{p+1})_j^{n+1} = (U^{p+1})_j^n + (p+1)(U^p)_j^n (U_j^{n+1} - U_j^n), p \geq 1$$

şeklinde tanımlanan Richtmyer yaklaşımı kullanıldı. Bu yaklaşım, $U^{p+1}(x_j, t_n + k)$ fonksiyonu (x_j, t_n) noktası civarında Taylor serisine açılır ve $\frac{\partial U}{\partial t}$ yerine ileri fark yaklaşımı yazılırsa;

$$\begin{aligned}
(U^{p+1})_j^{n+1} &= (U^{p+1})_j^n + k \frac{\partial U^{p+1}}{\partial t}(x_j, t_n) + O(k^2) \\
&= (U^{p+1})_j^n + k \frac{\partial U^{p+1}}{\partial u}(x_j, t_n) \frac{\partial U}{\partial t}(x_j, t_n) + O(k^2) \\
&= U^{p+1}(x_j, t_n) + k(p+1)U^p(x_j, t_n) \frac{\partial U}{\partial t}(x_j, t_n) + O(k^2) \\
&= U^{p+1}(x_j, t_n) + (p+1)U^p(x_j, t_n)[U(x_j, t_n + k) - U(x_j, t_n)] + O(k^2) \\
&= (U^{p+1})_j^n + (p+1)(U^p)_j^n (U_j^{n+1} - U_j^n) + O(k^2)
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

2.1.3 Kararlılık analizi

Sonlu fark yöntemi kullanılarak çözülen bir diferansiyel denklemde kararlılık analizinin yeri çok önemlidir. Diferansiyel denklemin yaklaşık çözümünü veren sonlu fark denkleminin, gerçek çözüme ne kadar yakın olduğunu belirleyen koşullar kararlılık şartları olarak adlandırılır. Bu şartları araştırmak ve belirlemek için yapılan çalışmaya ise kararlılık analizi denir [10].

Lineer sonlu fark yaklaşımının kararlılık analizinin incelenmesinde genellikle Fourier Seri veya Matris Yöntemleri kullanılır. Bu çalışmada elde edilen nümerik şemanın kararlılık analizi Fourier Seri Yöntemi kullanılarak yapılacağından bu yöntem hakkında aşağıda kısaca bilgi verildi.

2.1.3.1 Fourier seri (von Neumann) yöntemi

Fourier seri yönteminde, $t = 0$ zamanı boyunca düğüm noktalarındaki başlangıç değerleri Fourier serileri ile ifade edilir. Fourier serileri, kosinüs veya sinüs fonksiyonlarının toplamı biçiminde yazılır.

$$\sum A_s e^{is\pi x/l}$$

şeklinde gösterilebilir. Burada $i = \sqrt{-1}$, $a \leq x \leq b$ ve l fonksiyonun tanımlı olduğu aralığın uzunluğudur.

$$x = x_j = a + j\Delta x = a + jh$$

düğüm noktasında serinin bir birleşimi ele alınırsa

$$A_s e^{is\pi x/l} = A_s e^{is\pi jh/Jh} = A_s e^{i\varphi_s jh}$$

yazılabilir. Burada $\varphi_s = s\pi/Jh$ ve $Jh = l$ dir.

$t = 0$ zamanı boyunca düğüm noktalarındaki başlangıç değerleri

$$U_j^0 = \sum_{s=0}^J e^{i\varphi_s jh} \quad , \quad j = 0(1)J$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $(J + 1)$ tane denklemden $(J + 1)$ tane farklı A katsayısı tek türlü belirlenebilir. Böylece başlangıç düğüm değerlerinin üstel formda ifade edilebileceği gösterilmiş olur. Lineer fark denklemleri bağımsız çözümlerin toplamı şeklinde yazılabileceği için düğüm noktalarındaki başlangıç değeri $e^{i\varphi_j h}$ gibi sadece bir başlangıç

değerinden elde etmek mümkündür. Ayrıca A_s katsayısı sabittir ve ihmal edilebilir. t değeri artarken üstel dağılıma bakılacak olursa

$$U_j^n = e^{i\varphi x} e^{at} = e^{i\varphi jh} e^{ank} = e^{i\varphi jh} \xi^n$$

olarak alınabilir. Burada $\xi = e^{ak}$ güçlendirme faktörü ve a genellikle karmaşık bir katsayıdır [15].

Lax-Richtmyer [12] tanımına göre başlangıç şartını sağlayan φ 'nin bütün değerleri için $h \rightarrow 0$ ve $k \rightarrow 0$ olduğunda her $n \leq N$ değerleri için $|U_j^n|$ sınırlıysa sonlu fark yaklaşımı kararlıdır.

Fark denklemlerinin tam çözümü zamana göre üstel biçimde artmıyorsa kararlılık için gerek ve yeter şart

$$|\xi| \leq 1$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır [12].

2.1.4 Lokal kesme hatası

Lokal kesme hatası, sonlu fark denkleminin kısmi diferansiyel denkleme ne derece iyi yaklaştığını veren bir ölçüdür. Taylor seri açılımının kullanılmasıyla lokal kesme hatası, h ve k değerlerinin kuvvetleri ve (jh, nk) noktasında kısmi diferansiyel denklemin tam çözümünün (U) kısmi türevleri cinsinden kolayca hesaplanabilir.

(j, n) -inci grid noktasında bir kısmi diferansiyel denkleme yaklaşan fark denklemi, $F(U_j^n) = 0$ olarak gösterilsin. (j, n) -inci grid noktasında sonlu fark yaklaşımının lokal kesme hatası, $U(x_j, t_n)$ kısmi diferansiyel denkleminin tam çözümü olmak üzere, $T_{m,n} = F[U(x_j, t_n)]$ olarak tanımlanır [12].

2.1.5 Tutarlılık

$(h, k) \rightarrow 0$ olduğunda lokal kesme hatasının limit değeri sıfıra yaklaşıyorsa fark denklemi tutarlıdır. Yani $\lim_{h,k \rightarrow 0} T_{m,n} = 0$ ise fark denklemi tutarlıdır denir [12].

2.1.6 Kararlılık

Kısmi diferansiyel denkleme karşılık gelen sonlu fark denkleminin çözümünün kısmi diferansiyel denklemin çözümüne yakın kaldığı durumlarda yöntem kararlıdır denir [12].

2.1.7 Yakınsaklık

U_j^n fark denkleminin ve $U(x_j, t_n)$ ise kısmi diferansiyel denklemin tam çözümleri olmak üzere $\lim_{h,k \rightarrow 0} U_j^n = U(x_j, t_n)$ oluyorsa sonlu fark denkleminin çözümü kısmi diferansiyel denklemin çözümüne yakınsar denir [12].

2.1.8 Lax'ın Denklik Teoremi

Bir lineer sonlu fark şemasının yakınsak olması için gerek ve yeter şart yöntemin kararlı ve tutarlı olmasıdır. Yani şema, $(\text{Tutarlı}) + (\text{Kararlı}) \Leftrightarrow (\text{Yakınsak})$ [12].



3. GENELLEŞTİRİLMİŞ EŞİT GENİŞLİKLİ DALGA (GEW) DENKLEMİ

Bu bölümde,

$$U_t + \varepsilon U^p U_x - \mu U_{xxt} = 0 \quad (3.1)$$

biçiminde verilen GEW denklemi için literatürde farklı araştırmacılar tarafından sunulan çalışmaların kısa bir özeti verildi. Ayrıca farklı başlangıç ve sınır şartlarına sahip model problemler tanıtıldı.

3.1 GEW Denklemi ile İlgili Yapılan Çalışmalar

(3.1) ile verilen GEW denklemi $p = 1$ için $U_t + \varepsilon U U_x - \mu U_{xxt} = 0$ olur. Bu ise literatürde klasik EW denklemi olarak bilinir. Şimdiye kadar, bir çok matematikçi EW denkleminin çözümlerini analitik ve nümerik yöntemler yardımıyla elde etmişlerdir. Gardner ve Gardner [16], EW denkleminin çözümünü bulurken, kübik B-spline fonksiyonlarla beraber Galerkin sonlu elemanlar yöntemini kullanmıştır. Gardner vd. [17], kuadratik B-spline fonksiyonlarla beraber Petrov-Galerkin sonlu elemanlar yöntemini kullanarak EW denkleminin nümerik çözümlerini araştırmışlardır. Doğan [18], lineer sonlu elemanlar ile Galerkin metodunu kullanarak EW denkleminin çözümünü araştırmıştır. Zaki [19], EW denkleminin nümerik çözümleri için en küçük kareler sonlu elemanlar algoritmasını kullanmıştır. Ateş [20], yüksek lisans tezinde, $U U_x$ non-lineer terimi yerine farklı lineer sonlu fark yaklaşımları kullanarak EW denkleminin nümerik çözümlerini bulmuştur. Esen [21], EW denkleminin yaklaşık çözümlerini bulmak için kuadratik B-spline fonksiyonlar ve Lumped Galerkin yöntemini birlikte kullanmıştır. Karakaş [22], yüksek lisans tezinde trigonometrik ve kübik baz fonksiyonlarına dayalı kollokasyon sonlu eleman yöntemiyle EW denkleminin nümerik çözümlerini bulmuştur. Saka [23], EW denkleminin sayısal çözümlerini kuadratik B-spline fonksiyonları kullanarak Galerkin yöntemi ile bulmuştur. Dağ ve Saka [24], EW denkleminin çözümlerini bulmak için kübik, kuartik ve septik B-spline fonksiyonlara dayanan kollokasyon yöntemini kullanmışlardır. Aynı şekilde Raslan ve Fazal-I-Haq [25,26], çalışmalarında EW denkleminin çözümü için kübik, kuartik ve septik B-spline fonksiyonlarla kollokasyon yöntemini kullanmışlardır. Helvacıoğlu [27], yüksek lisans tezinde EW denkleminin nümerik çözümü için önce kuadratik B-spline Galerkin metodunu kullanmış 3 test probleminde test etmiştir. Daha sonra kübik B-spline kolokeyşin metodu ile

EW denkleminin nümerik çözümlerini araştırmıştır. Çakıcı Pınarbaşı [28], EW denkleminin nümerik çözümlerini bulmak için 3 adımlı ve 4 adımlı üstel B-spline kolokasyon yöntemi kullanmıştır.

(3.1) ile verilen GEW denkleminin $p = 2$ için özel hali de MEW denklemdir. MEW denklemi ile yapılan araştırmalar ise şöyle özetlenebilir. Esen [29], MEW denkleminin nümerik çözümlerini elde etmek için kuadratik B-spline fonksiyonlarla birlikte Lumped Galerkin yöntemini kullanmıştır. Karakoç ve Geyikli [30], kübik B-spline fonksiyonlarıyla Lumped Galerkin ve Petrov-Galerkin yöntemleriyle MEW denkleminin yaklaşık çözümünü bulmuşlardır. Karakoç [31], çalışmasında kübik, kuintik, septik B-spline fonksiyonlar ile kolokasyon yöntemini kullanarak MEW denkleminin nümerik çözümlerini araştırmıştır. Saka [32], kolokasyon sonlu elemanlar yöntemini kullanarak MEW denkleminin çözümlerini elde etmiştir. Islam vd. [33], MEW denkleminin sayısal çözümleri için kuartik B-Spline fonksiyonlara dayanan kolokasyon yöntemini kullanmışlardır. Keskin [34], yaptığı çalışmada sonlu fark yöntemini kullanarak EW, MEW, RLW ve MRLW denklemlerinin çözümünü yapmıştır. Yine, Raslan vd. [35], MEW denklemini sonlu fark yöntemi kullanarak nümerik çözümlerini araştırmış daha sonra von-Neumann yöntemi ile kararlılık analizini yapmışlardır. Hassan [36], çalışmasında Fourier Spektral yöntemi ve Leapfrog yöntemi kullanarak, MEW denkleminin nümerik çözümlerini bulmuştur. Essa [37], ise multigrid yöntemini ve sonlu fark yöntemi kullanarak MEW denkleminin nümerik çözümlerini elde etmiştir.

Bu çalışmada ele alınan GEW denklemi için daha önce yapılan çalışmaları inceleyecek olursak şu şekilde özetleyebiliriz. Kaya [38], Kuintik B-spline ve Septik B-spline kolokasyon yöntemlerini kullanarak GEW denkleminin sayısal çözümlerini bulmuştur. Karta [39], makalesinde Lie-Trotter algoritmasını kullanarak GEW denklemini lineer ve non-lineer olarak iki denkleme ayırmış, her bir denklem için kübik B-spline Galerkin sonlu elemanlar yöntemini uygulayarak iki sayısal şema elde etmiş ve bu şemalar ile iki model problem olarak bu problemleri nümerik çözümlerini bulmuş ve karşılaştırmalarını yapmıştır. Panahipour [40], ise GEW denkleminin sayısal çözümlerini RBF kolokasyon metodunu kullanarak bulmuştur. Yöntemin etkinliğini ve doğruluğunu göstermek için tek soliton dalga, iki soliton dalga, üç soliton dalga ve Maxwellian başlangıç koşulları ile çözmüştür. Karakoç vd. [41] makalelerinde, septik B-Spline sonlu elemanlar yöntemini kullanarak GEW denkleminin sayısal çözümlerini incelemişlerdir. İlk önce Galerkin sonlu elemanlar

yöntemini önermiş ve daha sonra sırasıyla yarı-ayrık ve Crank-Nicolson Galerkin sonlu elemanlar yaklaşımını incelemişlerdir. Bhowmik ve Karakoç [42] makalelerinde; Petrov-Galerkin yöntemini kullanarak eleman şekil fonksiyonlarının (kuadratik ve ağırlık fonksiyonları olarak) incelenmesini konu edinmiştir. Bu yöntemle, denklemin zayıf formunun çözümlerinin varlığı ve tekliğini araştırmışlardır. Ayrıca, teorik sınırları belirlemek için yarı-ayrık denklemden kaynaklanan hataları incelemişlerdir. Önerilen şemanın koşulsuz olarak kararlı olduğunu göstermek için güçlü Fourier analizi uygulamışlardır. İnan ve Bahadır [43] makalelerinde, kapalı sonlu fark yöntemi ile GEW denklemin nümerik çözümlerini bulmuşlardır. GEW denklemi non-lineer olduğundan denklemi çözmek için kullanılan şema da non-lineerdir. Bunun için Newton yöntemini kullanmışlardır. Önerilen yöntemin doğrusal kararlılık analizi von Neumann yaklaşımı kullanılarak incelenmiş ve bu araştırma sonunda yöntemin koşulsuz kararlı olduğu görülmüştür. Zeybek ve Karakoç [44], makalelerinde kübik B-Spline Galerkin metodu kullanılarak GEW denkleminin nümerik çözümleri bulmuşlardır. Yine Zeybek ve Karakoç[45], başka bir makalelerinde kuintik B-Spline kollokasyon metodu ile GEW denkleminin nümerik çözümlerini sunmuşlardır. Çalışmalarında iki farklı lineerleştirme tekniği kullanmışlardır. Tatlısu [46], tez çalışmasında B-Spline fonksiyonlar yardımıyla Petrov-Galerkin sonlu elemanlar yöntemini kullanarak GEW ve MKDV denklemlerinin sayısal çözümlerini elde etmiştir. Evans ve Raslan [47], çalışmalarında kuadratik B-Spline fonksiyonlar kullanarak kollokasyon yöntemi ile GEW Denkleminin nümerik çözümlerini buldular. Esen ve Kutluay [48], çalışmalarında MEW denkleminin bir lineerleştirme tekniği kullanarak sonlu farklar yöntemi ile nümerik çözümlerini araştırmışlardır. Roshan [49], makalesinde GEW denklemini B-Spline fonksiyonlar kullanarak Petrov-Galerkin yöntemi ile nümerik çözümlerini incelemiş ve bu çalışmada tek soliton, iki soliton ve Maxwellian başlangıç koşullu problemleri test etmiş ve kararlılığı incelemiştir.

3.2 Model Problemler

Bu kısımda,

$$U_t + \varepsilon U^p U_x - \mu U_{xxt} = 0$$

şeklinde verilen GEW denklemi için üç model problem göz önüne alındı. Burada ε ve μ pozitif parametreler, p ise pozitif bir tamsayıdır.

Nümerik yöntemin doğruluğunu göstermek ve daha önceki çalışmalarda elde edilen sonuçlarla karşılaştırmak için

$$L_2 = \|U^{tam} - U^{num}\|_2 \cong \sqrt{h \sum_{j=0}^J |U_j^{tam} - U_j^{num}|^2},$$

$$L_\infty = \|U^{tam} - U^{num}\|_\infty = \max_j |U_j^{tam} - U_j^{num}|$$

biçiminde verilen L_2 ve L_∞ hata normları hesaplandı.

Ayrıca Evans ve Raslan [47] tarafından verilen ve sırasıyla soliter dalğanın kütle, momentum ve enerji ile ilgili üç hareket sabiti olan

$$I_1 = \int_a^b U dx \cong h \sum_{i=1}^J U_i^n,$$

$$I_2 = \int_a^b [U^2 + \mu U_x^2] dx \cong h \sum_{i=1}^J [(U_i^n)^2 + \mu ((U_x)_i^n)^2],$$

$$I_3 = \int_a^b U^{p+2} dx \cong h \sum_{i=1}^J (U_i^n)^{p+2}$$

korunum sabitleri hesaplandı.

Bu tez çalışmasında yukarıda verilen GEW denklemi

$$U(a, t) = U(b, t) = 0, \quad t > 0$$

homojen sınır şartları ve üç farklı başlangıç şartı ile göz önüne alındı.

Problem 1: Tek soliter dalga hareketi

Bu problem için başlangıç şartı, $A = \sqrt{\frac{c(p+1)(p+2)}{2\varepsilon}}$ dalga genliği, c pozitif x –yönünde hareket eden dalğanın sabit hızı, x_0 keyfi sabit olmak üzere;

$$U(x, 0) = \sqrt[p]{A \operatorname{sech}^2 \left[\frac{p}{2\sqrt{\varepsilon}} (x - x_0) \right]}$$

dir. Bu problemin tam çözümü,

$$U(x, t) = \sqrt[p]{A \operatorname{sech}^2 \left[\frac{p}{2\sqrt{\varepsilon}} (x - ct - x_0) \right]}$$

dir [47].

Bu problem için hatanın yaklaşık yakınsaklık mertebesi;

$$Mertebe(L) = \log_2 \left[\frac{L(2h, 2k)}{L(h, k)} \right], \quad (L = L_2, L_\infty)$$

formülüyle hesaplandı [50].

Problem 2: İki soliter dalganın etkileşimi

Bu problem için başlangıç şartı

$$U(x, 0) = \sum_{i=1}^2 \sqrt{\frac{c_i(p+1)(p+2)}{2\varepsilon}} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{p}{2\sqrt{\varepsilon}}(x - x_i) \right]$$

dir. Burada $i = 1, 2$ için c_i ve x_i keyfi sabitlerdir.

Problem 3: Maxwellian başlangıç şartlı dalga hareketi

Bu problem için başlangıç şartı

$$U(x, 0) = e^{-x^2}, -20 \leq x \leq 20$$

dır.

4. GEW DENKLEMİNİN CRANK-NICOLSON SONLU FARK YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde

$$U_t + \varepsilon U^p U_x - \mu U_{xxt} = 0 \quad (4.1)$$

biçiminde verilen GEW denkleminin, Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi ile nümerik çözümleri elde edildi. Yöntemin uygulanması sırasında ortaya çıkan lineer olmayan terimler için iki farklı lineerleştirme tekniği kullanıldı.

4.1 Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi-I (CNSFY-I)

Bu kısımda (4.1) denklemindeki U_t terimi yerine

$$U_t \cong \frac{U^{n+1} - U^n}{k}$$

ileri fark yaklaşımı, U_{xxt} terimi yerine

$$U_{xxt} \cong \frac{U_{xx}^{n+1} - U_{xx}^n}{k} \cong \frac{U_{j-1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j+1}^{n+1}}{kh^2} - \frac{U_{j-1}^n - 2U_j^n + U_{j+1}^n}{kh^2}$$

sonlu fark yaklaşımı ve $U^p U_x$ yerine de

$$U^p U_x \cong \frac{1}{2} [(U^p U_x)^{n+1} + (U^p U_x)^n]$$

yaklaşımı yazılırsa

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{k} + \varepsilon \frac{1}{2} ((U^p U_x)^{n+1} + (U^p U_x)^n) - \mu \left(\frac{U_{xx}^{n+1} - U_{xx}^n}{k} \right) = 0$$

elde edilir. Burada $(U^p U_x)^{n+1}$ terimi yerine Bölüm 2.1.1 de bahsedilen

$$(U^p U_x)^{n+1} = (U^p)_j^n (U_x)_j^{n+1} + (p)(U^{p-1})_j^n (U_x)_j^n (U_j^{n+1}) - p(U^p)_j^n (U_x)_j^n$$

biçimindeki Rubin-Graves [13] tipi yaklaşım yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} + \varepsilon \frac{1}{2} \{ & [(U^p)_j^n (U_x)_j^{n+1} + (p)(U^{p-1})_j^n (U_x)_j^n (U_j^{n+1}) - p(U^p)_j^n (U_x)_j^n \\ & + (U^p U_x)_j^n] \} - \frac{\mu}{k} \left(\frac{U_{j-1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j+1}^{n+1}}{h^2} - \frac{U_{j-1}^n - 2U_j^n + U_{j+1}^n}{h^2} \right) \\ & = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte U_x terimi yerine merkezi fark yaklaşımı yazılır ve düzenlenirse;

$$\begin{aligned}
& \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} + \frac{\varepsilon}{2} \left\{ \left[(U^p)_j^n \left(\frac{U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}}{2h} \right) + (p)(U^{p-1})_j^n \left(\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h} \right) (U_j^{n+1}) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (1-p)(U^p)_j^n \left(\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h} \right) \right] \right\} \\
& \quad - \frac{\mu}{k} \left(\frac{U_{j-1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j+1}^{n+1}}{h^2} - \frac{U_{j-1}^n - 2U_j^n + U_{j+1}^n}{h^2} \right) \\
& = 0
\end{aligned}$$

bulunur. Elde edilen bu denklem indislere göre tekrar düzenlenirse;

$$\begin{aligned}
& \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} + \frac{\varepsilon}{2} (U^p)_j^n \left(\frac{U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}}{2h} \right) + \frac{\varepsilon p}{2} (U^{p-1})_j^n \left(\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h} \right) U_j^{n+1} \\
& \quad - \frac{\varepsilon(1-p)}{2} (U^p)_j^n \left(\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h} \right) \\
& \quad - \frac{\mu}{k} \left(\frac{U_{j-1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j+1}^{n+1}}{h^2} - \frac{U_{j-1}^n - 2U_j^n + U_{j+1}^n}{h^2} \right) = 0
\end{aligned}$$

ve buradan,

$$\begin{aligned}
& U_{j-1}^{n+1} \left(-\frac{\varepsilon}{4h} (U^p)_j^n - \frac{\mu}{kh^2} \right) + U_j^{n+1} \left(\frac{1}{k} + \frac{\varepsilon p}{2h} (U^{p-1})_j^n \left(\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2} \right) + \frac{2\mu}{kh^2} \right) \\
& \quad + U_{j+1}^{n+1} \left(\frac{\varepsilon}{4h} (U^p)_j^n - \frac{\mu}{kh^2} \right) \\
& = U_{j-1}^n \left(\frac{\varepsilon(1-p)}{4h} (U^p)_j^n - \frac{\mu}{kh^2} \right) + U_j^n \left(\frac{1}{k} + \frac{2\mu}{kh^2} \right) \\
& \quad + U_{j+1}^n \left(-\frac{\varepsilon(1-p)}{4h} (U^p)_j^n - \frac{\mu}{kh^2} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu şema $j = 1, j = M - 1$ için çıkan sınır terimleri eşitliğin sağ tarafında toplanarak matris formunda

$$a_{i,i} = \frac{1}{k} + \frac{\varepsilon p}{4h} (U^{p-1})_i^n (U_{i+1}^n - U_{i-1}^n) + \frac{2\mu}{kh^2}, \quad i = 1(1) M - 1$$

$$a_{i,i+1} = \frac{\varepsilon (U^p)_i^n}{4h} - \frac{\mu}{kh^2}, \quad i = 1(1) M - 2$$

$$a_{i,i-1} = -\frac{\varepsilon (U^p)_i^n}{4h} - \frac{\mu}{kh^2}, \quad i = 2(1) M - 1$$

indisleri ve

$$b_{i,i} = \frac{1}{k} + \frac{2\mu}{kh^2}, \quad i = 1(1) M - 1$$

$$b_{i,i+1} = -\frac{\varepsilon(1-p)(U^p)_i^n}{4h} - \frac{\mu}{kh^2}, \quad i = 1(1)M-2$$

$$b_{i,i-1} = \frac{\varepsilon(1-p)(U^p)_i^n}{4h} - \frac{\mu}{kh^2}, \quad i = 2(1)M-1$$

olmak üzere

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a_{M-2M-3} & a_{M-2M-2} & a_{M-2M-1} \\ & & & & a_{M-1M-2} & a_{M-1M-1} \end{bmatrix}}_A \times \begin{bmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ \vdots \\ U_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix} =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & & & \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & & \\ & b_{32} & b_{33} & b_{34} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & b_{M-2M-3} & b_{M-2M-2} & b_{M-2M-1} \\ & & & & b_{M-1M-2} & b_{M-1M-1} \end{bmatrix}}_B \times \begin{bmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ \vdots \\ U_{M-1}^n \end{bmatrix} +$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -U_a^{n+1} \left(-\frac{\varepsilon}{4h} (U^p)_1^n - \frac{\mu}{kh^2} \right) + U_a^n \left(\frac{\varepsilon(1-p)}{4h} (U^p)_1^n - \frac{\mu}{kh^2} \right) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -U_b^{n+1} \left(\frac{\varepsilon}{4h} (U^p)_{M-1}^n - \frac{\mu}{kh^2} \right) + U_b^n \left(-\frac{\varepsilon(1-p)}{4h} (U^p)_{M-1}^n - \frac{\mu}{kh^2} \right) \end{bmatrix}}_c$$

biçiminde gösterilir. Yani kapalı formda ifade edilecek olursa

$$AU^{n+1} = BU^n + c$$

olur.

4.2 Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi-II (CNSFY-II)

Bu kısımda (4.1) ile verilen ;

$$U_t + \varepsilon U^p U_x - \mu U_{xxt} = 0$$

biçimindeki GEW denkleminde, $U^p U_x$ lineer olmayan terimi ;

$$U^p U_x = \frac{(U^{p+1})_x}{p+1}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$(U^{p+1})_x = (p+1)U^p U_x$$

olur. Böylece yukarıdaki GEW denklemi;

$$U_t + \frac{\varepsilon}{p+1} (U^{p+1})_x - \mu U_{xxt} = 0$$

haline gelir. Şimdi denklemdeki U_t terimi yerine

$$U_t = \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k}$$

ileri fark yaklaşımı; U_{xxt} terimi yerine önce ileri fark, sonra merkezi fark yaklaşımları

$$U_{xxt} = \frac{U_{xx}^{n+1} - U_{xx}^n}{k} = \frac{U_{j-1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j+1}^{n+1}}{kh^2} - \frac{U_{j-1}^n - 2U_j^n + U_{j+1}^n}{kh^2}$$

yazılırsa ve denklemdeki $(U^{p+1})_x$ yerine de, $\delta_x U_j^n = \frac{(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n)}{2h}$ olmak üzere,

$$(U^{p+1})_x = \frac{\delta_x (U^{p+1})_j^{n+1} + \delta_x (U^{p+1})_j^n}{2}$$

yazılırsa ve buradaki $(U^{p+1})_j^{n+1}$ lineer olmayan terimi yerine Bölüm 2.1.2 de bahsedilen Richtmyer [12,14] yaklaşımı

$$(U^{p+1})_j^{n+1} = (U^{p+1})_j^n + (p+1)(U^p)_j^n (U_j^{n+1} - U_j^n)$$

yazılırsa

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} - \frac{\varepsilon}{p+1} \left(\delta_x \left(\frac{((U^{p+1})_j^n + (p+1)(U^p)_j^n)(U_j^{n+1} - U_j^n)}{2} \right) \right) + \delta_x \frac{(U^p)_j^n}{2} - \frac{\mu}{kh^2} (U_{j-1}^{n+1} -$$

$$2U_j^{n+1} + U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^n + 2U_j^n - U_{j+1}^n) = 0$$

elde edilir. Şemanın okunurluğunu kolaylaştırmak için

$$U_j^{n+1} - U_j^n = w_j$$

$$U_{j-1}^{n+1} - U_{j-1}^n = w_{j-1}$$

$$U_{j+1}^{n+1} - U_{j+1}^n = w_{j+1}$$

düzenlemesi yapılırsa

$$\frac{w_j}{k} - \frac{\varepsilon}{p+1} \left[\delta_x \left(\frac{((U^{p+1})_j^n + (p+1)(U^p)_j^n w_j)}{2} \right) + \delta_x \frac{(U^{p+1})_j^n}{2} - \frac{\mu}{kh^2} (w_{j-1} - 2w_j + w_{j+1}) \right] = 0$$

biçiminde ifade edilir. Daha sonra şemadaki δ_x ile gösterilen türevler açılır ve tekrar düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned} \frac{w_j}{k} - \frac{\varepsilon}{p+1} \left[\frac{(p+1)}{2} \delta_x (U^p)_j^n w_j + \delta_x (U^{p+1})_j^n \right] - \frac{\mu}{kh^2} (w_{j-1} - 2w_j + w_{j+1}) &= 0 \\ \frac{w_j}{k} - \frac{\varepsilon}{p+1} \left[\frac{(p+1)}{2} \left(\frac{(U^p)_{j+1}^n w_{j+1} - (U^p)_{j-1}^n w_j}{2h} \right) + \frac{(U^{p+1})_{j+1}^n - (U^{p+1})_{j-1}^n}{2h} \right] \\ - \frac{\mu}{kh^2} (w_{j-1} - 2w_j + w_{j+1}) &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu sistem matris formunda,

$$\begin{aligned} w_{j-1} \left(-\frac{\mu}{kh^2} \right) + w_j \left(\frac{1}{k} + \frac{2\mu}{kh^2} + \frac{\varepsilon}{4h} (U^p)_{j-1}^n \right) + w_{j+1} \left(-\frac{\mu}{kh^2} - \frac{\varepsilon}{4h} (U^p)_{j+1}^n \right) \\ = \frac{\varepsilon}{(p+1)2h} ((U^{p+1})_{j+1}^n - (U^{p+1})_{j-1}^n) \end{aligned}$$

$$a_{i,i} = \frac{1}{k} + \frac{\varepsilon}{4h} (U^p)_{i-1}^n + \frac{2\mu}{kh^2}, \quad i = 1(1) M-1$$

$$a_{i,i+1} = -\frac{\varepsilon (U^p)_{i+1}^n}{4h} - \frac{\mu}{kh^2}, \quad i = 1(1) M-2$$

$$a_{i,i-1} = -\frac{\mu}{kh^2}, \quad i = 2(1) M-1$$

$$b_j = \frac{\varepsilon}{2h(p+1)} ((U^{p+1})_{j+1}^n - (U^{p+1})_{j-1}^n), \quad i = 1(1) M-1$$

olmak üzere

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & & \\ & a_{32} & a_{33} & a_{34} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{M-2M-3} & a_{M-2M-2} & a_{M-2M-1} \\ & & & & a_{M-1M-2} & a_{M-1M-1} \end{bmatrix}}_A \times \begin{bmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ \vdots \\ U_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{M-2} \\ b_{M-1} \end{bmatrix}}_b$$

biçiminde gösterilir. Yani kapalı formda ifade edilecek olursa

$$AU^{n+1} = b$$

olur.

4.3 Şemanın Lokal Kesme Hatası [12]

(4.1) ile verilen GEW denkleminin

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} + \frac{\varepsilon}{2} [(U^p U_x)^{n+1} + (U^p U_x)^n] - \mu \left[\frac{(U_{xx})_j^{n+1} - (U_{xx})_j^n}{k} \right] = 0 \dots (*)$$

(*) ile verilen Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımında U_x ve U_{xx} türevleri yerine $O(h^2)$ mertebeden merkezi fark formülleri yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} + \frac{\varepsilon}{2} \left[(U^p)_j^{n+1} \left(\frac{U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}}{2h} \right) + (U^p)_j^n \left(\frac{U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}}{2h} \right) \right] \\ - \frac{\mu}{k} \left(\frac{U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1}}{h^2} - \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik kısaca

$$F_{j,n}(U) = 0$$

olarak gösterilebilir. Lokal kesme hatası $U(x_j, t_n)$ kısmi diferansiyel denkleminin herhangi bir (x_j, t_n) grid noktasındaki tam çözümü olmak üzere

$$T_{j,n} = F[U(x_j, t_n)] \dots (**)$$

olarak tanımlanır. $U(x_j, t_n + k)$, $U(x_j - h, t_n + k)$, $U(x_j + h, t_n + k)$, $U(x_j - h, t_n)$,

$U^p U_x(x_j, t_n + k)$ terimlerinin Taylor seri açılımları

$$\begin{aligned} U(x_j, t_n + k) &= U_j^n + k \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_j^n + \frac{k^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right)_j^n + \frac{k^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial t^3} \right)_j^n + \frac{k^4}{4!} \left(\frac{\partial^4 U}{\partial t^4} \right)_j^n + \dots \\ U(x_j - h, t_n + k) &= U_j^n - h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_j^n + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_j^n - \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right)_j^n + \frac{h^4}{4!} \left(\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right)_j^n + \dots + \\ &\quad + k \frac{\partial}{\partial t} \left[U_j^n - h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_j^n + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_j^n - \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right)_j^n + \frac{h^4}{4!} \left(\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right)_j^n + \dots \right]_j^n \\ &\quad + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[U_j^n - h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_j^n + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_j^n - \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right)_j^n + \frac{h^4}{4!} \left(\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right)_j^n + \dots \right]_j^n \\ &\quad + \frac{k^3}{3!} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \left[U_j^n - h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_j^n + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_j^n - \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right)_j^n + \frac{h^4}{4!} \left(\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right)_j^n + \dots \right]_j^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U(x_j + h, t_n + k) &= U_j^n + h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_j^n + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_j^n + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right)_j^n + \frac{h^4}{4!} \left(\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right)_j^n + \\
&\quad + k \frac{\partial}{\partial t} \left[U_j^n + h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_j^n + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_j^n + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right)_j^n + \frac{h^4}{4!} \left(\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right)_j^n + \dots \right]_j^n \\
&\quad + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[U_j^n + h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_j^n + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_j^n + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right)_j^n + \frac{h^4}{4!} \left(\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right)_j^n + \dots \right]_j^n \\
&\quad + \frac{k^3}{3!} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \left[U_j^n + h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_j^n + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_j^n + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right)_j^n + \frac{h^4}{4!} \left(\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right)_j^n + \dots \right]_j^n \\
U(x_j - h, t_n) &= U_j^n - h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_j^n + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_j^n - \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right)_j^n + \frac{h^4}{4!} \left(\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right)_j^n + \dots \\
U(x_j + h, t_n) &= U_j^n + h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_j^n + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_j^n + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right)_j^n + \frac{h^4}{4!} \left(\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right)_j^n + \dots \\
U^p U_x(x_j, t_n + k) &= (U^p U_x)_j^n + k \left(\frac{\partial U^p U_x}{\partial t} \right)_j^n + \frac{k^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 U^p U_x}{\partial t^2} \right)_j^n + \frac{k^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 U^p U_x}{\partial t^3} \right)_j^n + \dots
\end{aligned}$$

olup (**) eşitliğinde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} - \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_j^n + \frac{k}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right)_j^n + \frac{k^2}{6} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial t^3} \right)_j^n + \frac{k^3}{24} \left(\frac{\partial^4 U}{\partial t^4} \right)_j^n + \dots \\
&\frac{\varepsilon}{2} ((U^p U_x)_j^{n+1} - (U^p U_x)_j^n) \\
&= \varepsilon (U^p U_x)_j^n + \varepsilon \frac{k}{2} \left(\frac{\partial U^p U_x}{\partial t} \right)_j^n + \varepsilon \frac{k^2}{4} \left(\frac{\partial^2 U^p U_x}{\partial t^2} \right)_j^n + \varepsilon \frac{k^3}{12} \left(\frac{\partial^3 U^p U_x}{\partial t^3} \right)_j^n + \dots \\
&-\frac{\mu}{k} \left(\frac{U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1}}{h^2} \right) \\
&= -\frac{\mu}{k} \left[-\frac{2k}{h^2} \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{k^2}{h^2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right) - \frac{k^3}{3h^2} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial t^3} \right) + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right. \\
&\quad - \frac{k^4}{12h^2} \left(\frac{\partial^4 U}{\partial t^4} \right) + k \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{2U_j^n}{h^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right) \\
&\quad + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{2U_j^n}{h^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right) + \frac{k^3}{6} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \left(\frac{2U_j^n}{h^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right) \\
&\quad \left. + \frac{k^4}{24} \frac{\partial^4}{\partial t^4} \left(\frac{2U_j^n}{h^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right) + \dots \right]
\end{aligned}$$

$$\frac{\mu}{k} \left(\frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2} \right) = \frac{\mu}{k} \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right]$$

Lokal kesme hatası

$$\begin{aligned} T_j^n = & \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \varepsilon U^p U_x - \mu \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} \right)_j^n + \frac{k}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \varepsilon U^p U_x - \mu \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} \right)_j^n \\ & + k^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{1}{6} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{4} U^p U_x - \frac{\mu}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} \right)_j^n \\ & + k^3 \frac{\partial^3}{\partial t^3} \left(\frac{1}{24} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{12} U^p U_x - \frac{\mu}{24} \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} \right)_j^n \\ & + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(-\frac{\mu}{k} \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\mu k}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\mu k^2}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} - \frac{\mu k^3}{24} \frac{\partial^4 U}{\partial t^4} \right)_j^n + \dots (***) \end{aligned}$$

olarak bulunur. $U(x_j, t_n)$ KDD'nin tam çözümü olduğundan yukarıdaki eşitlikte birinci ve ikinci terimler açıkça sıfırdır. Yani

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t} + \varepsilon U^p U_x - \mu \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} \right)_j^n = 0$$

ve

$$\frac{k}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \varepsilon U^p U_x - \mu \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} \right)_j^n = 0$$

dır.

$$\begin{aligned} T_j^n = & k^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{1}{6} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{4} U^p U_x - \frac{\mu}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} \right)_j^n + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(-\frac{\mu}{k} \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\mu k}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\mu k^2}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} - \frac{\mu k^3}{24} \frac{\partial^4 U}{\partial t^4} \right)_j^n \\ & + k^3 \frac{\partial^3}{\partial t^3} \left(\frac{1}{24} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{12} U^p U_x - \frac{\mu}{24} \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} \right)_j^n + \dots \end{aligned}$$

Böylece şemanın lokal kesme hatasının esas kısmı

$$k^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{1}{6} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{4} U^p U_x - \frac{\mu}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} \right)_j^n + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(-\frac{\mu}{k} \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\mu k}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\mu k^2}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} - \frac{\mu k^3}{24} \frac{\partial^4 U}{\partial t^4} \right)_j^n$$

olup lokal kesme hatasının mertebesi;

$$O(k^2) + O(h^2)$$

dir.

4.4 Kararlılık Analizi

Bu kısımda,

$$U_t + \varepsilon U^p U_x - \mu U_{xxt} = 0$$

biçiminde verilen GEW denkleminin CNSFY ile elde edilen şemasının kararlılık analizi von Neumann yöntemi ile incelenecektir. Önce denklemdeki lineer olmayan $U^p = \hat{U}$ terimi lokal sabit olmak üzere CNFSY şeması oluşturulacaktır. Bu amaçla

$$U_t = \frac{U^{n+1} - U^n}{k}$$

yerine ileri fark yaklaşımı, $U^p U_x = \hat{U} U_x$ terimi yerine

$$U^p U_x = \hat{U} U_x = \frac{(\hat{U} U_x)^{n+1} + (\hat{U} U_x)^n}{2}$$

Crank-Nicolson yaklaşımı, U_{xxt} yerine de

$$U_{xxt} = \frac{U_{j-1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j+1}^{n+1}}{h^2} - \frac{U_{j-1}^n - 2U_j^n + U_{j+1}^n}{h^2}$$

sonlu fark yaklaşımı alınır ve bu yaklaşımlar yerine yazılırsa

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} + \varepsilon \frac{(\hat{U} U_x)_j^{n+1} + (\hat{U} U_x)_j^n}{2} - \frac{\mu}{k} \left[\frac{U_{j-1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j+1}^{n+1}}{h^2} - \frac{U_{j-1}^n - 2U_j^n + U_{j+1}^n}{h^2} \right] = 0$$

veya

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} + \frac{\varepsilon}{2} \hat{U} \left[\frac{U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}}{2h} + \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h} \right] - \frac{\mu}{kh^2} [U_{j-1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^n + 2U_j^n - U_{j+1}^n] = 0$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k} U_j^{n+1} + \frac{\varepsilon}{4h} \hat{U} U_{j+1}^{n+1} - \frac{\varepsilon}{4h} \hat{U} U_{j-1}^{n+1} - \frac{\mu}{kh^2} U_{j-1}^{n+1} + \frac{2\mu}{kh^2} U_j^{n+1} - \frac{\mu}{kh^2} U_{j+1}^{n+1} \\ & = \frac{1}{k} U_j^n - \frac{\varepsilon}{4h} \hat{U} U_{j+1}^n + \frac{\varepsilon}{4h} \hat{U} U_{j-1}^n - \frac{\mu}{kh^2} U_{j-1}^n + \frac{2\mu}{kh^2} U_j^n - \frac{\mu}{kh^2} U_{j+1}^n \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} & U_{j+1}^{n+1} \left[\frac{\varepsilon}{4h} \hat{U} - \frac{\mu}{kh^2} \right] + U_j^{n+1} \left[\frac{1}{k} + \frac{2\mu}{kh^2} \right] + U_{j-1}^{n+1} \left[-\frac{\varepsilon}{4h} \hat{U} - \frac{\mu}{kh^2} \right] \\ & = U_{j+1}^n \left[-\frac{\varepsilon}{4h} \hat{U} - \frac{\mu}{kh^2} \right] + U_j^n \left[\frac{1}{k} + \frac{2\mu}{kh^2} \right] + U_{j-1}^n \left[\frac{\varepsilon}{4h} \hat{U} - \frac{\mu}{kh^2} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi bu şemanın kararlılık analizini von Neumann yöntemi ile inceleyelim.

$$U_j^n = \xi^n e^{i\beta jh}, i = \sqrt{-1}$$

olmak üzere

$$U_{j+1}^{n+1} = \xi^{n+1} e^{i\beta(j+1)h}, U_{j-1}^{n+1} = \xi^{n+1} e^{i\beta(j-1)h}, U_{j+1}^n = \xi^n e^{i\beta(j+1)h}, U_{j-1}^n = \xi^n e^{i\beta(j-1)h}$$

dir. Bunlar yukarıdaki eşitlikte yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \xi^{n+1} e^{i\beta(j+1)h} \left[\frac{\varepsilon}{4h} \hat{U} - \frac{\mu}{kh^2} \right] + \xi^{n+1} e^{i\beta jh} \left[\frac{1}{k} + \frac{2\mu}{kh^2} \right] + \xi^{n+1} e^{i\beta(j-1)h} \left[-\frac{\varepsilon}{4h} \hat{U} - \frac{\mu}{kh^2} \right] \\ &= \xi^n e^{i\beta(j+1)h} \left[-\frac{\varepsilon}{4h} \hat{U} - \frac{\mu}{kh^2} \right] + \xi^n e^{i\beta jh} \left[\frac{1}{k} + \frac{2\mu}{kh^2} \right] \\ &+ \xi^n e^{i\beta(j-1)h} \left[\frac{\varepsilon}{4h} \hat{U} - \frac{\mu}{kh^2} \right] \end{aligned}$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılrısa

$$\begin{aligned} & \xi^{n+1} e^{i\beta jh} \left[e^{i\beta h} \left(\frac{\varepsilon}{4h} \hat{U} - \frac{\mu}{kh^2} \right) + e^{-i\beta h} \left(-\frac{\varepsilon}{4h} \hat{U} - \frac{\mu}{kh^2} \right) + \left(\frac{1}{k} + \frac{2\mu}{kh^2} \right) \right] \\ &= \xi^n e^{i\beta jh} \left[e^{i\beta h} \left(-\frac{\varepsilon}{4h} \hat{U} - \frac{\mu}{kh^2} \right) + e^{-i\beta h} \left(\frac{\varepsilon}{4h} \hat{U} - \frac{\mu}{kh^2} \right) + \left(\frac{1}{k} + \frac{2\mu}{kh^2} \right) \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafı $\xi^n e^{i\beta jh}$ ile sadeleştirilirse

$$\begin{aligned} & \xi \left[\frac{\varepsilon}{4h} \hat{U} (e^{i\beta h} - e^{-i\beta h}) - \frac{\mu}{kh^2} (e^{i\beta h} + e^{-i\beta h}) + \left(\frac{1}{k} + \frac{2\mu}{kh^2} \right) \right] \\ &= -\frac{\varepsilon}{4h} \hat{U} (e^{i\beta h} - e^{-i\beta h}) - \frac{\mu}{kh^2} (e^{i\beta h} + e^{-i\beta h}) + \left(\frac{1}{k} + \frac{2\mu}{kh^2} \right) \end{aligned}$$

bulunur.

$$e^{i\beta h} = \cos(\beta h) + i \sin(\beta h), \cos(\beta h) = \frac{e^{i\beta h} + e^{-i\beta h}}{2}, \sin(\beta h) = \frac{e^{i\beta h} - e^{-i\beta h}}{2i}$$

eşitlikleri son denklemde yerlerine yazılırsa;

$$\xi \left[\frac{\varepsilon}{2h} \hat{U} i \sin(\beta h) - \frac{2\mu}{kh^2} \cos(\beta h) + \left(\frac{1}{k} + \frac{2\mu}{kh^2} \right) \right] = -\frac{\varepsilon \hat{U} i}{2h} \sin(\beta h) - \frac{2\mu}{kh^2} \cos(\beta h) + \left(\frac{1}{k} + \frac{2\mu}{kh^2} \right)$$

elde edilir. Buradan

$$\xi = \frac{-\frac{\varepsilon \hat{U} i}{2h} \sin(\beta h) - \frac{2\mu}{kh^2} \cos(\beta h) + \left(\frac{1}{k} + \frac{2\mu}{kh^2} \right)}{\frac{\varepsilon}{2h} \hat{U} i \sin(\beta h) - \frac{2\mu}{kh^2} \cos(\beta h) + \left(\frac{1}{k} + \frac{2\mu}{kh^2} \right)}$$

bulunur. Bu ifade $\lambda = -\frac{2\mu}{kh^2} \cos(\beta h) + \left(\frac{1}{k} + \frac{2\mu}{kh^2} \right)$, $\tau = \frac{\varepsilon}{2h} \hat{U} \sin(\beta)$ olmak üzere

$$\xi = \frac{\lambda - i\tau}{\lambda + i\tau}$$

şeklinde yazılabilir. Şemanın kararlı olabilmesi için $|\xi| \leq 1$ olmalıdır. Açıkça

$$|\xi| = \frac{|\lambda - i\tau|}{|\lambda + i\tau|} = \frac{\sqrt{\lambda^2 + \tau^2}}{\sqrt{\lambda^2 + \tau^2}} = 1$$

dir. Böylece şema şartsız kararlıdır.

4.5 Nümerik Sonuçlar

4.5.1 Tek soliter dalga hareketi

Problem 1'in CNSFY-I ve CNSFY-II yöntemleri ile $p = 2, 3, 4, 6, 8$ ve 10 için farklı genlik (A), konum (h) ve zaman (k) adımlarında elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte korunum sabitleri ve farklı çalışmalarla karşılaştırmaları Çizelge 4.1-4.23' de verildi. Ayrıca yine farklı p ve genlik değerleri için problemin davranışını gösteren grafikler Şekil 4.1-4-4' de sunuldu.

Çizelge 4.1: Tek soliter dalganın $p = 2$ için $t = 20$ zamanında, farklı A, h, k değerleri için CNSFY-I ile elde edilen hata normları.

$p = 2$							
	c	1/32	0.05	0.1	0.25	0.35	0.5
	A	0.25	0.3162	0.4472	0.7071	0.8367	1
h	k						
$L_2 \times 10^2$							
0.1	0.2	0.03556619	0.0723703	0.2114867	1.048329	2.141369	5.173343
	0.1	0.03544332	0.0717561	0.2045105	0.868621	1.542434	3.006040
	0.05	0.03541367	0.0716026	0.2027681	0.823957	1.394411	2.476555
	0.01	0.03540418	0.0715535	0.2022109	0.809718	1.347396	2.309730
0.05	0.2	0.00902240	0.0187378	0.06000702	0.4444267	1.141437	3.477481
	0.1	0.00890247	0.0181167	0.05295216	0.2627059	0.535988	1.287382
	0.05	0.00887248	0.0179615	0.05119059	0.2175457	0.386336	0.752162
	0.01	0.00886289	0.0179118	0.05062726	0.2031496	0.338804	0.583511
0.025	0.2	0.00237673	0.0053094	0.02208982	0.2932569	0.8910776	3.052751
	0.1	0.00225643	0.0046863	0.01500994	0.1109932	0.2839692	0.856965
	0.05	0.00222636	0.0045306	0.01324295	0.0656925	0.1338816	0.320285
	0.01	0.00221674	0.0044917	0.01267804	0.0512546	0.0862135	0.151163
$L_\infty \times 10^2$							
0.1	0.2	0.02257551	0.0463336	0.1359084	0.6605021	1.341209	3.226065
	0.1	0.02250137	0.0459415	0.1313973	0.5457545	0.962344	1.866540
	0.05	0.02248284	0.0458435	0.1302708	0.5172639	0.868861	1.534928
	0.01	0.02247691	0.0458121	0.1299105	0.5081862	0.839199	1.430601
0.05	0.2	0.00572537	0.0120055	0.03859538	0.2814503	0.7185654	2.179089
	0.1	0.00565044	0.0116107	0.03402972	0.1654945	0.3355805	0.802595
	0.05	0.00563171	0.0115120	0.03289170	0.1367016	0.2410764	0.467151
	0.01	0.00562572	0.0114805	0.03252778	0.1275272	0.2110882	0.361615
0.025	0.2	0.00150796	0.0034000	0.01423847	0.1865018	0.5625443	1.916641
	0.1	0.00143260	0.0030032	0.00965924	0.0702466	0.1785503	0.535900
	0.05	0.00141376	0.0029040	0.00851562	0.0413788	0.0837960	0.199540
	0.01	0.00140773	0.0028792	0.00814989	0.0321804	0.0537280	0.093714

Çizelge 4.2: Tek soliter dalga için $p = 2$ için $t = 20$ zamanında, farklı A, h, k değerleri için CNSFY-II ile elde edilen hata normları.

		$p = 2$						
		c	1/32	0.05	0.1	0.25	0.35	0.5
		A	0.25	0.3162	0.4472	0.7071	0.8367	1
h	k							
		$L_2 \times 10^2$						
0.1	0.2	0.02701547	0.05398072	0.1449728	0.6041391	1.315593	3.664900	
	0.1	0.02694476	0.05360035	0.1400592	0.4397701	0.7337072	1.502763	
	0.05	0.02692713	0.05350597	0.1388603	0.4011356	0.5963380	0.986719	
	0.01	0.02692150	0.05347583	0.1384793	0.3891039	0.5539643	0.828545	
0.05	0.2	0.006824974	0.01389025	0.04160728	0.3278304	0.9306631	3.097598	
	0.1	0.006752817	0.01349592	0.03626990	0.1512046	0.3283006	0.906451	
	0.05	0.006734995	0.01340008	0.03503319	0.1100891	0.1836062	0.374933	
	0.01	0.006729311	0.01336965	0.03464738	0.09775359	0.1399724	0.212286	
0.025	0.2	0.001781794	0.003905576	0.01659033	0.2633458	0.8379763	2.957577	
	0.1	0.001706213	0.003472787	0.01040478	0.08176372	0.2310196	0.761147	
	0.05	0.001688138	0.003374023	0.00906905	0.03779023	0.08188377	0.224809	
	0.01	0.001682428	0.003343347	0.00867483	0.02482236	0.03632857	0.058005	
		$L_\infty \times 10^2$						
0.1	0.2	0.02575371	0.05166101	0.1226497	0.4123602	0.8494655	2.272239	
	0.1	0.02570247	0.05138372	0.1191463	0.3092123	0.4996159	0.980657	
	0.05	0.02568966	0.05131437	0.1182707	0.2835260	0.4129883	0.667131	
	0.01	0.02568556	0.05129218	0.1179906	0.2753271	0.3854321	0.568184	
0.05	0.2	0.006495406	0.01318767	0.03422055	0.2081127	0.5694969	1.922865	
	0.1	0.006445765	0.01290809	0.03069514	0.1032879	0.2128936	0.564393	
	0.05	0.006433350	0.01283818	0.02981408	0.0774619	0.1250965	0.245448	
	0.01	0.006429376	0.01281580	0.02953221	0.0693400	0.0973935	0.145371	
0.025	0.2	0.001675635	0.003576777	0.01212462	0.1642023	0.5251030	1.852386	
	0.1	0.001624851	0.003296626	0.00855820	0.0520104	0.1417284	0.471275	
	0.05	0.001612149	0.003226565	0.00767576	0.0258290	0.0531507	0.140238	
	0.01	0.001608084	0.003204142	0.00739345	0.0175948	0.0252270	0.039444	

Çizelge 4.1-4.2 de sırasıyla CNSFY-I ve CNSFY-II ile $p = 2$ ve $0 \leq x \leq 80$ değeri için farklı h, k değerleri alınarak hata normları hesaplandı. c değeri büyürken (A) genlik arttığından hata normlarında büyüme gözlenirken h değeri küçüldükçe hata normlarının da küçüldüğü her iki çizelgeden görülmektedir.

Çizelge 4.3 ve Çizelge 4.4’de $p = 2$, $c = 1/32$, $A = 0.25$, $h = 0.1$, $k = 0.2$, $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ için elde edilen I_1, I_2, I_3 korunum sabitleri ve L_2, L_∞ hata normları verilmiştir. Çizelge 4.3 incelendiğinde CNSFY-I ile hesaplanan korunum sabitlerindeki değişimin çok az olduğu ve hata normlarının da yeterince küçük olduğu açıktır. Benzer şekilde Çizelge 4.4’te sunulan CNSFY-II ile hesaplanan korunum sabitlerinin de hemen hemen değişmediği ve hata normlarının da CNSFY-I’e göre biraz daha küçük olduğu görülmüştür. CNSFY-I ve CNSFY-II ile hesaplanan sonuçların diğer çalışmalarda

elde edilen sonuçlarla karşılaştırmaları Çizelge 4.5’te verildi. Bu çizelgeden sonuçlarımızın, sonlu fark yöntemi kullanan [48]’deki çalışmayla uyumlu, diğer çalışmalardaki sonuçlarla yakın olduğu görülmektedir.

Çizelge 4.3: Tek soliter dalğanın CNSFY-I ile farklı t zamanlarında elde edilen korunum sabitleri ve hata normları ($p = 2$, $c = 1/32$, $A = 0.25$, $h = 0.1$, $k = 0.2$).

	I_1	I_2	I_3	L_2	L_∞
$t = 0$	0.78539816	0.16647304	0.00520833	4.637455×10^{-16}	4.718448×10^{-16}
$t = 5$	0.78539818	0.16647305	0.00520833	8.9013557×10^{-5}	5.506866×10^{-5}
$t = 10$	0.78539822	0.16647307	0.00520834	1.779789×10^{-4}	1.110980×10^{-4}
$t = 15$	0.78539828	0.16647311	0.00520834	2.668558×10^{-4}	1.683372×10^{-4}
$t = 20$	0.78539837	0.16647315	0.00520835	3.556192×10^{-4}	2.257551×10^{-4}

Çizelge 4.4: Tek soliter dalğanın CNSFY-II ile farklı t zamanlarda elde edilen korunum sabitleri ve hata normları ($p = 2$, $c = 1/32$, $A = 0.25$, $h = 0.1$, $k = 0.2$).

	I_1	I_2	I_3	L_2	L_∞
$t = 0$	0.78539816	0.16647304	0.00520833	4.637455×10^{-16}	4.718448×10^{-16}
$t = 5$	0.78539816	0.16647308	0.00520833	6.828725×10^{-5}	6.100845×10^{-5}
$t = 10$	0.78539816	0.16647319	0.00520833	0.1362756×10^{-5}	0.1255957×10^{-5}
$t = 15$	0.78539816	0.16647336	0.00520833	0.2036649×10^{-5}	0.1917659×10^{-5}
$t = 20$	0.78539816	0.16647358	0.00520833	0.2701547×10^{-5}	0.2575371×10^{-5}

Çizelge 4.5: Tek soliter dalğanın CNSFY-I ve CNSFY-II ile $t = 20$ ’de elde edilen sonuçlarının diğer çalışmalardaki sonuçlar ile karşılaştırılması ($p = 2$, $c = \frac{1}{32}$, $A = 0.25$, $h = 0.1$, $k = 0.2$).

	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^4$	$L_\infty \times 10^4$
CNSFY-I	0.78539837	0.16647315	0.00520835	3.556192	2.257551
CNSFY-II	0.78539816	0.16647358	0.00520833	2.701547	2.575371
[2]	0.7853966	0.1666663	0.0052083	1.2775844	0.6887276
[38]	0.7853966	0.1666664	0.0052083	0.13526316	0.09151024
[39]	0.78539831	0.16666661	0.00520834	0.8000154	0.4579168
[47]	0.7852864	0.1665818	0.005206082	2.021476	1.569539
[48]	0.7853977	0.1664736	0.0052083	2.701647	2.576377

Tek soliter dalğanın, $p = 2$, $c = 1/2$, $A = 1$, $h = 0.1$, $k = 0.2$, $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$, $0 \leq x \leq 80$ değerleri için CNSFY-I ve CNSFY-II ile elde edilen I_1, I_2, I_3 korunum sabitleri ve L_2, L_∞ hata normları sırasıyla Çizelge 4.6 ve Çizelge 4.7’de verildi. Çizelgelerden her iki yöntem için de korunum sabitlerindeki değişimin çok az olduğu ve hata normlarının küçük

ve uyumlu olduğu açıktır. Ayrıca sonuçların diğer çalışmalarda elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmaları Çizelge 4.8’de verildi. Bu çizelgede karşılaştırma yapılan çalışmalarda sonlu elemanlar yöntemi kullanıldığından beklenildiği üzere hata normlarımızın bu çalışmalardaki hata normlarından biraz daha büyük olduğu görülmektedir. Tek soliter dalga hareketinin davranışını sergilemek için $t = 0, 10$ ve 20 zamanlarında $p = 2$, $c = 1/2$, $A = 1$, $h = 0.05$, $k = 0.1$, $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$, CNSFY-I ile hesaplanan nümerik ve tam çözümün grafikleri Şekil 4.1’de sunuldu. Şekilden zaman ilerledikçe tek dalganın genliğini ve şeklini koruyarak sağa doğru hareket ettiği görülmektedir. Örneğin $t = 0$ zamanında dalga $x = 30$ konumunda ve genliği $A = 1$ iken $t = 30$ zamanında dalganın $x = 40$ konumunda ve genliği $A=0.99997169$ ’dir. Ayrıca $t=20$ zamanında Tek soliter dalganın arkasında bıraktığı zayıf iz dalgaları Şekil 4.2’de sunuldu.

Çizelge 4.6: Tek soliter dalganın CNSFY-I ile farklı t zamanlarda elde edilen korunum sabitleri ve hata normları ($p = 2$, $c = 1/2$, $A = 1$).

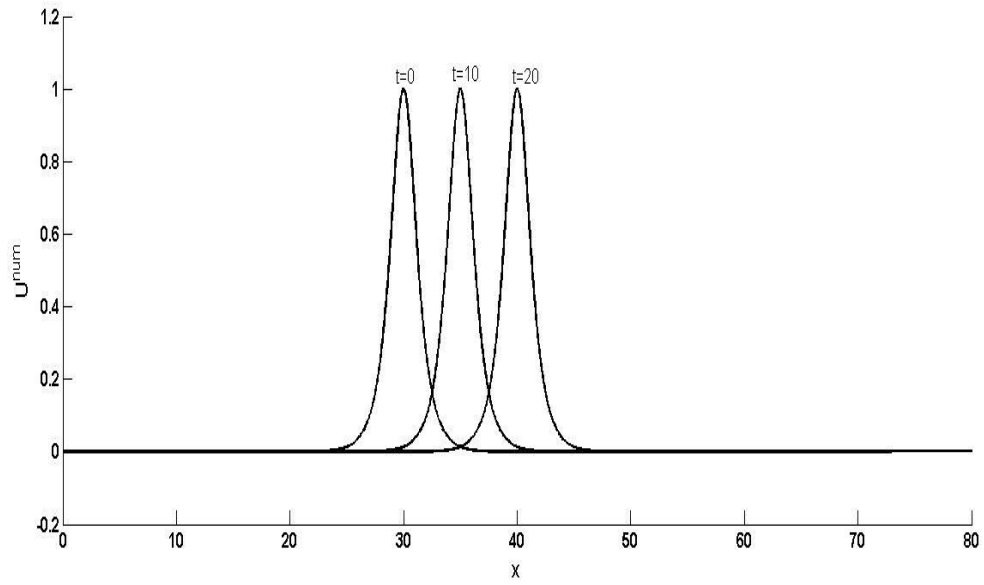
	I_1	I_2	I_3	L_2	L_∞
$t=0$	3.14159265	2.66356862	1.33333333	1.854982×10^{-15}	1.887379×10^{-15}
$t=5$	3.14159968	2.66331327	1.33309300	1.221763×10^{-2}	7.874471×10^{-3}
$t=10$	3.14159707	2.66303098	1.33280972	2.507452×10^{-2}	1.589713×10^{-2}
$t=15$	3.14159392	2.66274809	1.33252642	3.829328×10^{-2}	2.402309×10^{-2}
$t=20$	3.14159085	2.66246549	1.33224357	5.173343×10^{-2}	3.226065×10^{-2}

Çizelge 4.7: Tek soliter dalganın CNSFY-II ile farklı t zamanlarda elde edilen korunum sabitleri ve hata normları ($p = 2$, $c = 1/2$, $A = 1$).

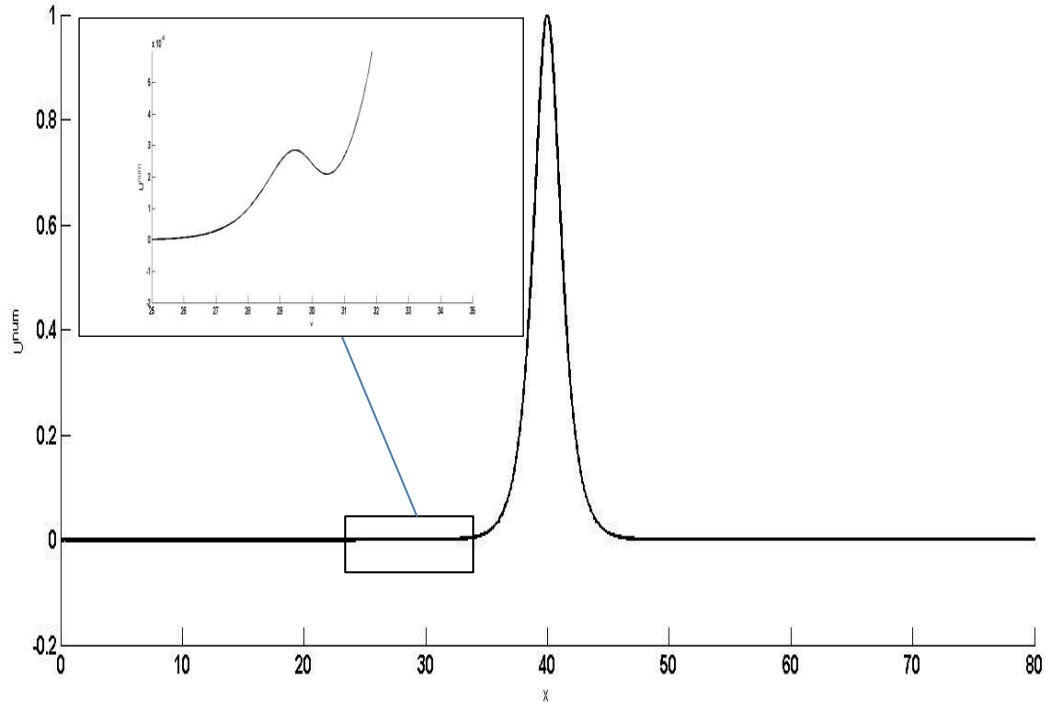
	I_1	I_2	I_3	L_2	L_∞
$t = 0$	3.14159265	2.66356862	1.33333333	1.854982×10^{-15}	1.887379×10^{-15}
$t = 5$	3.14159265	2.66330452	1.33304859	0.9552311×10^{-2}	0.6360542×10^{-2}
$t = 10$	3.14159265	2.66302682	1.33276878	1.855182×10^{-2}	1.173322×10^{-2}
$t = 15$	3.14159265	2.66274812	1.33248977	2.750986×10^{-2}	1.716720×10^{-2}
$t = 20$	3.14159265	2.66246956	1.33221098	3.664900×10^{-2}	2.272239×10^{-2}

Çizelge 4.8: Tek soliter dalganın CNSFY-I ve CNSFY-II ile elde edilen sonuçlarının diğer çalışmalardaki sonuçlar ile karşılaştırılması ($p = 2$, $c = \frac{1}{2}$, $A = 1$, $t = 20$).

	I_1	I_2	I_3	L_2	L_∞
CNSFY-I	3.14159085	2.66246549	1.33224357	0.05173343	0.03226065
CNSFY-II	3.14159265	2.66246956	1.33221098	0.03664900	0.02722390
[2]	3.1415858	2.6666600	1.3333267	0.01708960	0.01050088
[38]	3.1416722	2.6669051	1.3335718	0.01675092	0.01026391
[39]	3.1414785	2.6665209	1.3331868	0.0130231	0.0083971
[41]	3.1415870	2.6666621	1.3333284	0.02014034	0.01246335
[46]	3.1415961	2.6682568	1.3333413	0.01286582	0.00831346



Şekil 4-1: CNSFY-I :Tek soliter dalganın hareketi ($p = 2$, $c = 1/2$, $A = 1$)



Şekil 4-2: CNSFY-I :Tek soliter dalganın arkasında bıraktığı zayıf iz dalgaları
($p = 2, c = 1/2, A = 1$ ve $t = 20$)

Çizelge 4.1-4.8’de Tek soliter dalganın $p = 2$ ve farklı parametre değerleri için sunulan çizelgelerine benzer olarak Çizelge 4.9-Çizelge 4.16’da $p = 3$ için elde edilen sonuçlar verildi. Çizelge 4.9 ve Çizelge 4.10’da sırasıyla CNSFY-I ve CNSFY-II ile $p = 3$ değeri için farklı c ve A değerleri alınarak h ve k ’ye göre L_2 ve L_∞ hata normlarının $t=20$ anındaki değerleri verildi. Buna göre genlik büyüdükçe hata normları da büyürken, h ve k değerleri küçüldükçe hata normlarının da küçüldüğü görüldü.

Çizelge 4.9: Tek soliter dalga için $p = 3$ için $t = 20$ zamanında, farklı A , h ve k değerleri için CNSFY-I ile elde edilen hata normları.

		$p = 3$						
		c	0.001	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3
		A	0.1494	0.6934	0.7937	0.8736	0.9410	1
h	k							
		$L_2 \times 10^3$						
0.1	0.2	0.01267869	6.186266	11.45064	18.50181	27.87097	40.25753	
	0.1	0.01267864	5.932940	10.45140	15.83133	22.10661	29.37970	
	0.05	0.01267863	5.869855	10.20374	15.17386	20.69924	26.74979	
	0.01	0.01267862	5.849715	10.12491	14.96543	20.25545	25.92582	
0.05	0.2	0.00317837	1.811664	3.896197	7.369960	12.86273	21.13862	
	0.1	0.00317831	1.553450	2.877498	4.648003	6.989389	10.06012	
	0.05	0.00317830	1.489141	2.624959	3.977545	5.554373	7.379060	
	0.01	0.00317830	1.468608	2.544557	3.764940	5.101668	6.538573	
0.025	0.2	0.00079519	0.7128733	1.997621	4.571463	9.088950	16.33035	
	0.1	0.00079513	0.4533995	0.973928	1.836384	3.188008	5.201309	
	0.05	0.00079512	0.3887780	0.720140	1.162610	1.745965	2.507308	
	0.01	0.00079511	0.3681464	0.639341	0.948947	1.291008	1.662657	
		$L_\infty \times 10^3$						
0.1	0.2	0.00841416	4.322926	7.927507	12.70422	19.02990	27.38151	
	0.1	0.00841412	4.146109	7.233308	10.86082	15.07152	19.94266	
	0.05	0.00841411	4.102099	7.061449	10.40776	14.10724	18.14857	
	0.01	0.00841411	4.088052	7.006776	10.26429	13.80359	17.58745	
0.05	0.2	0.00210846	1.266001	2.699667	5.069866	8.806021	14.42584	
	0.1	0.00210843	1.085895	1.992368	3.191344	4.771393	6.841253	
	0.05	0.00210842	1.041059	1.817207	2.729432	3.787938	5.010846	
	0.01	0.00210841	1.026747	1.761473	2.583103	3.478126	4.438068	
0.025	0.2	0.00052745	0.498188	1.385154	3.149419	6.232884	11.16302	
	0.1	0.00052742	0.317063	0.674593	1.262236	2.179673	3.543366	
	0.05	0.00052741	0.217966	0.498610	0.798140	1.191546	1.704230	
	0.01	0.00052741	0.257570	0.442611	0.651108	0.880231	1.128649	

Çizelge 4.10: Tek soliter dalganın $p = 3$ için $t = 20$ zamanında, farklı A , h ve k değerleri için CNSFY-II ile elde edilen hata normları.

$p = 3$							
	c	0.001	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3
	A	0.1494	0.6934	0.7937	0.8736	0.9410	1
h	k	$L_2 \times 10^3$					
0.1	0.2	0.0081508	3.336476	5.636599	9.026936	14.30657	22.31226
	0.1	0.0081508	3.148758	4.791301	6.577547	8.772130	11.61169
	0.05	0.0081508	3.103526	4.592168	6.007957	7.490102	9.132935
	0.01	0.0081507	3.089220	4.529835	5.831583	7.097022	8.379292
0.05	0.2	0.0020360	1.043760	2.350328	4.902282	9.380936	16.57114
	0.1	0.0020360	0.8352277	1.411217	2.255838	3.559405	5.513701
	0.05	0.0020359	0.7879589	1.199549	1.646830	2.194901	2.900650
	0.01	0.0020359	0.7733898	1.135740	1.465375	1.789085	2.121392
0.025	0.2	0.00050893	0.5005501	1.592855	3.941824	8.209686	15.18188
	0.1	0.00050890	0.2609388	0.586128	1.216434	2.311703	4.049443
	0.05	0.00050889	0.2088625	0.352787	0.563135	0.886058	1.366890
	0.01	0.00050889	0.1938393	0.285982	0.372005	0.459726	0.554005
		$L_\infty \times 10^3$					
0.1	0.2	0.0082120	2.904733	4.427009	6.715171	10.22078	15.49346
	0.1	0.0082119	2.758445	3.815978	5.045310	6.576033	8.531176
	0.05	0.0082119	2.721956	3.664119	4.632721	5.682548	6.850062
	0.01	0.0082119	2.710295	3.615699	4.501632	5.400031	6.321699
0.05	0.2	0.0020638	0.8752584	1.731349	3.388786	6.290711	11.01869
	0.1	0.0020638	0.7276867	1.109180	1.681920	2.557724	3.851055
	0.05	0.0020638	0.6908783	0.956053	1.263912	1.646234	2.136065
	0.01	0.0020638	0.6791164	0.907231	1.131770	1.361509	1.599933
0.025	0.2	0.00051614	0.3690248	1.062986	2.655864	5.564702	10.31104
	0.1	0.00051612	0.2189369	0.432446	0.843921	1.556632	2.686387
	0.05	0.00051611	0.1820067	0.277365	0.420284	0.637581	0.957378
	0.01	0.00051611	0.1702674	0.228476	0.287200	0.349387	0.416799

Tek soliter dalganın, $p = 3$, $c = 0.001$, $A = 0.15$, $h = 0.1$, $k = 0.2$, $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $x_0 = 0$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için CNSFY-I ve CNSFY-II ile elde edilen I_1, I_2, I_3 korunum sabitleri ve L_2, L_∞ hata normları sırasıyla Çizelge 4.11 ve Çizelge 4.12’de verildi. Bu çizelgelerden CNSFY-I ve CNSFY-II ile elde edilen korunum sabitlerindeki değişimin hemen hemen hiç değişmediği gözlemlenirken hata normlarının da oldukça küçük olduğu görülmüştür. Her iki yöntemin ve yapılan diğer çalışmalar ile karşılaştırmaların verildiği Çizelge 4.13’den ise sonuçların uyumlu olduğu görülmektedir.

Çizelge 4.11: Tek soliter dalgaının CNSFY-I ile farklı t zamanlarda elde edilen korunum sabitleri ve hata normları ($p = 3$, $c = 0.001$, $A = 0.15$).

	I_1	I_2	I_3	L_2	L_∞
$t=0$	0.42065463	0.05532373	0.00007484	2.936815×10^{-16}	3.053113×10^{-16}
$t=5$	0.42065463	0.05532373	0.00007484	3.222626×10^{-6}	2.134172×10^{-6}
$t=10$	0.42065463	0.05532373	0.00007484	6.445245×10^{-6}	4.271605×10^{-6}
$t=15$	0.42065463	0.05532373	0.00007484	9.667854×10^{-6}	6.411977×10^{-6}
$t=20$	0.42065463	0.05532373	0.00007484	1.289044×10^{-5}	8.554958×10^{-6}

Çizelge 4.12: Tek soliter dalgaının CNSFY-II ile farklı t zamanlarda elde edilen korunum sabitleri ve hata normları ($p = 3$, $c = 0.001$, $A = 0.15$).

	I_1	I_2	I_3	L_2	L_∞
$t = 0$	0.41891637	0.05486745	0.00007331	2.901069×10^{-16}	2.914335×10^{-16}
$t = 5$	0.41891637	0.05486745	0.00007331	2.037751×10^{-6}	2.048734×10^{-6}
$t = 10$	0.41891637	0.05486745	0.00007331	4.075485×10^{-6}	4.101050×10^{-6}
$t = 15$	0.41891637	0.05486745	0.00007331	6.113187×10^{-6}	6.155840×10^{-6}
$t = 20$	0.41891637	0.05486745	0.00007331	8.150838×10^{-6}	8.212017×10^{-6}

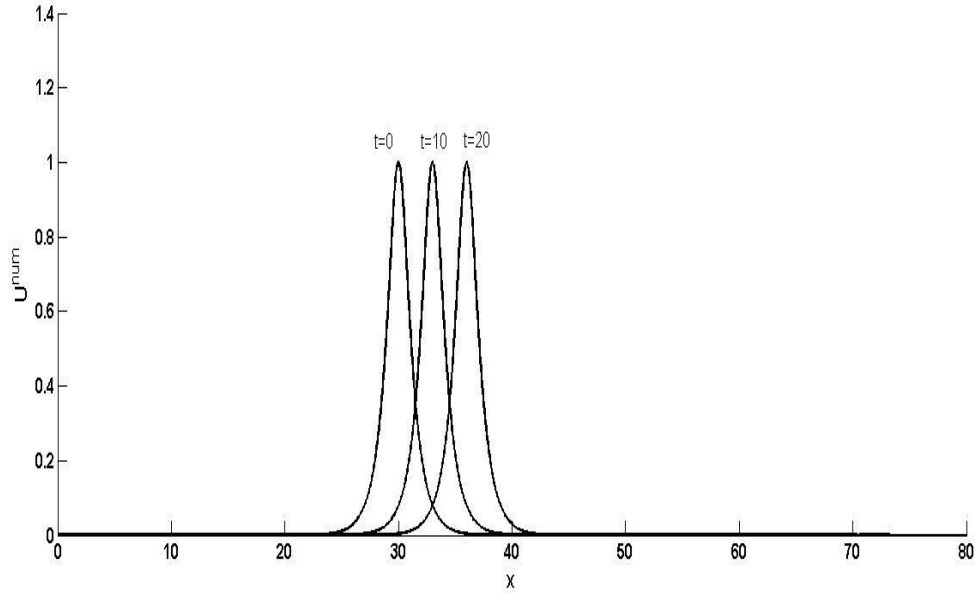
Çizelge 4.13: Tek soliter dalgaının CNSFY-I ve CNSFY-II ile elde edilen sonuçlarının diğer çalışmalardaki sonuçlar ile karşılaştırılması ($p = 3$, $c = 0.001$, $A = 0.15$, $t = 20$).

	I_1	I_2	I_3	L_2	L_∞
CNSFY-I	0.42065463	0.05532373	0.00007484	12.89044×10^{-6}	8.554958×10^{-6}
CNSFY-II	0.41891637	0.05486745	0.00007331	8.150838×10^{-6}	8.212017×10^{-6}
[2]	0.4189154	0.0549805	0.0000733	2.8248813×10^{-6}	$1.832910252 \times 10^{-6}$
[38]	0.4189154	0.0549807	0.0000733	1.9191480×10^{-6}	2.3287122×10^{-6}
[39]	0.41891637	0.05498063	0.00007330	0.00282383	0.00183008

Tek soliter dalgaının, $p = 3$, $c = 0.3$, $A = 1$, $h = 0.1$, $k = 0.2$, $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $x_0 = 0$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için CNSFY-I ve CNSFY-II ile elde edilen I_1, I_2, I_3 korunum sabitleri ve L_2, L_∞ hata normları sırasıyla Çizelge 4.14 ve Çizelge 4.15’de verildi. Her iki çizelgede de korunum sabitlerindeki değişimin çok az olduğu ve hata normlarının da yeterince küçük olduğu görülmektedir. Bu değerlerin diğer çalışmalarla elde edilen hata normlarının ve invariantlarının karşılaştırmaları Çizelge 4.16’da verildi. $p = 3$, $c = 0.3$, $A = 1$, $h = 0.05$, $k = 0.1$, $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$, değerleri için CNSFY-I ile hesaplanan nümerik ve tam çözümün grafikleri Şekil 4.3’de sunuldu. Şekilden zaman ilerledikçe tek dalgaının genliğini ve şeklini koruyarak sağa doğru hareket ettiği görülmektedir. Örneğin $t = 0$ zamanında dalga $x = 30$ konumunda ve genliği $A = 1$ iken $t = 30$ zamanında dalgaının $x = 36$ konumunda ve genliği $A=1.00001546$ ’dır.

Çizelge 4.14: Tek soliter dalgaının CNSFY-I ile farklı t zamanlarda elde edilen korunum sabitleri ve hata normları ($p = 3$, $c = 0.3$, $A = 1$).

	I_1	I_2	I_3	L_2	L_∞
$t=0$	2.80436421	2.45883251	0.98556555	1.95879×10^{-15}	1.998401×10^{-15}
$t=5$	2.80439414	2.45872097	0.98548826	9.603722×10^{-3}	6.715007×10^{-3}
$t=10$	2.80439340	2.45854961	0.98531653	1.953601×10^{-2}	1.354476×10^{-2}
$t=15$	2.80438933	2.45837438	0.98514014	2.980739×10^{-2}	2.042733×10^{-2}
$t=20$	2.80438572	2.45819982	0.98496509	4.025753×10^{-2}	2.738151×10^{-2}



Şekil 4-3: CNSFY-I: Tek soliter dalga hareketi ($p = 3$, $c = 0.3$, $A = 1$)

Çizelge 4.15: Tek soliter dalgaının CNSFY-II ile farklı t zamanlarda elde edilen korunum sabitleri ve hata normları ($p = 3$, $c = 0.3$, $A = 1$).

	I_1	I_2	I_3	L_2	L_∞
$t = 0$	2.80436421	2.45883251	0.98556555	1.958795×10^{-15}	1.998401×10^{-15}
$t = 5$	2.80436421	2.45872548	0.98539111	0.6309348×10^{-2}	0.5274477×10^{-2}
$t = 10$	2.80436421	2.45856259	0.98522043	1.185504×10^{-2}	0.8686300×10^{-2}
$t = 15$	2.80436421	2.45839317	0.98505035	1.707354×10^{-2}	1.204378×10^{-2}
$t = 20$	2.80436421	2.45822257	0.98488042	2.231226×10^{-2}	1.549346×10^{-2}

Çizelge 4.16: Tek soliter dalganın CNSFY-I ve CNSFY-II ile elde edilen sonuçlarının diğer çalışmalardaki sonuçlar ile karşılaştırılması ($p = 3$, $c = 0.3$, $A = 1$, $t = 20$).

	I_1	I_2	I_3	L_2	L_∞
CNSFY-I	2.80438572	2.45819982	0.98496509	0.04025753	0.02738151
CNSFY-II	2.80436421	2.4582257	0.98488042	0.02231226	0.01549346
[2]	2.8042943	2.4637496	0.9854012	0.00708099	0.00480353
[38]	2.8042943	2.4637496	0.9854012	0.00708099	0.00480353
[39]	2.8042672	2.4637786	0.9854339	0.0047254	0.0035306
[41]	2.8043567	2.4639082	0.9855599	0.01503316	0.00999356
[43]	2.804364	2.463874	0.985554	0.009131	0.006849
[45]	2.8042943	2.4637495	0.9854011	0.00708553	0.00480470
[46]	2.8043758	2.4665135	0.9855973	0.00448357	0.00337609

Çizelge 4.1-4.16’da Tek soliter dalganın $p = 2$ ve $p = 3$ farklı parametre değerleri için sunulan çizelgelere benzer olarak $p = 4$ için elde edilen sonuçlar Çizelge 4.17 - Çizelge 4.23’de verildi. Çizelgeler incelendiğinde yine hata normlarının yeterince küçük ve literatürdeki diğer çalışmalardaki sonuçlarla uyum içinde olduğu açıktır.

Tek soliter dalganın, $p = 4$, $c = 0.2$, $A = 1$, $h = 0.1$, $k = 0.2$, $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $x_0 = 0$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için CNSFY-I ve CNSFY-II ile elde edilen I_1, I_2, I_3 korunum sabitleri ve L_2, L_∞ hata normları sırasıyla Çizelge 4.17 ve Çizelge 4.18’de verildi. Bu çizelgelerde CNSFY-I ve CNSFY-II ile elde edilen korunum sabitlerinde büyük ölçüde değişimin olmadığı görülmekte olup hata normları da diğer durumlar gibi yeterince küçüktür. Elde edilen bu sonuçların diğer çalışmalarda elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmaları Çizelge 4.19’da verildi. Dalganın hareketini gözlemleyebilmek için; $p = 4$, $c = 0.2$, $A = 1$, $h = 0.05$, $k = 0.1$, $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$, değerleri için CNSFY-I ile hesaplanan nümerik ve tam çözümün grafikleri Şekil 4.4’de sunuldu. Şekilden zaman ilerledikçe tek dalganın genliğini ve şeklini koruyarak sağa doğru hareket ettiği görülmektedir. Örneğin $t = 0$ zamanında dalga $x = 30$ konumunda ve genliği $A = 1$ iken $t = 30$ zamanında dalga $x = 34$ konumunda ve genliği $A=1.00005423$ ’dir.

Çizelge 4.17: Tek soliter dalganın CNSFY-I ile farklı t zamanlarda elde edilen korunum sabitleri ve hata normları ($p = 4$, $c = 0.2$, $A = 1$).

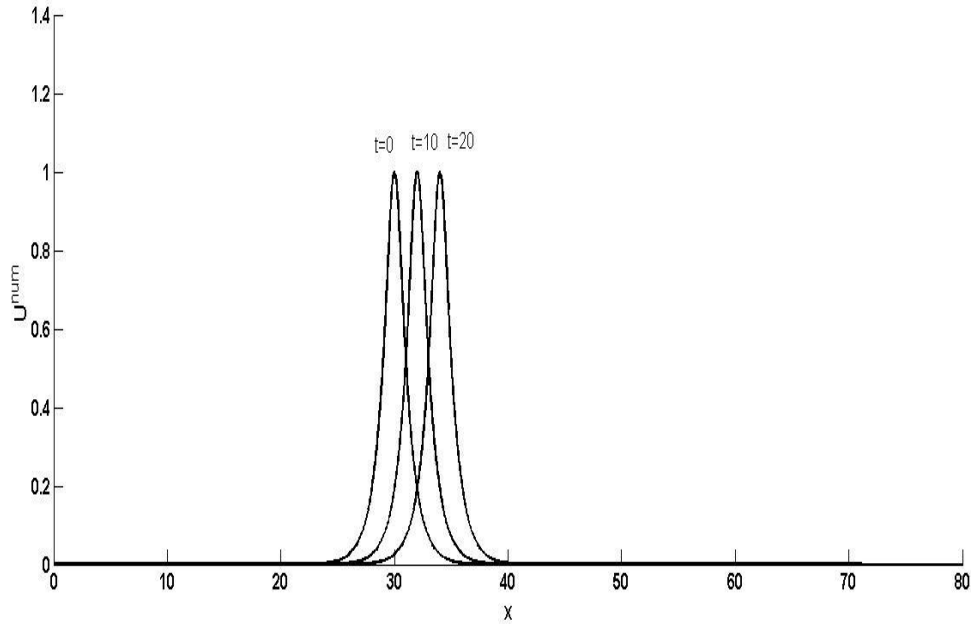
	I_1	I_2	I_3	L_2	L_∞
t=0	2.62205755	2.34906961	0.78539816	2.010628×10^{-15}	2.22044×10^{-15}
t=5	2.62213319	2.34911485	0.78550649	0.8441036×10^{-2}	0.6198279×10^{-2}
t=10	2.62214268	2.34911485	0.78543194	1.696801×10^{-2}	1.245541×10^{-2}
t=15	2.62213811	2.34893776	0.78533211	2.576591×10^{-2}	1.871930×10^{-2}
t=20	2.62213422	2.34884116	0.78523449	3.472327×10^{-2}	2.500833×10^{-2}

Çizelge 4.18: Tek soliter dalganın CNSFY-II ile farklı t zamanlarda elde edilen korunum sabitleri ve hata normları ($p = 4$, $c = 0.2$, $A = 1$).

	I_1	I_2	I_3	L_2	L_∞
$t = 0$	2.62205755	2.34906961	0.78539816	2.010628×10^{-15}	2.220446×10^{-15}
$t = 5$	2.62205755	2.34911481	0.78530373	0.4773109×10^{-2}	0.4962841×10^{-2}
$t = 10$	2.62205755	2.34904601	0.78521173	0.8750471×10^{-2}	0.7388764×10^{-2}
$t = 15$	2.62205755	2.34895593	0.78512022	1.221524×10^{-2}	0.9636826×10^{-2}
$t = 20$	2.62205755	2.34886496	0.78502878	1.553615×10^{-2}	1.191636×10^{-2}

Çizelge 4.19: Tek soliter dalganın CNSFY-I ve CNSFY-II ile elde edilen sonuçlarının diğer çalışmalardaki sonuçlar ile karşılaştırılması ($p = 4$, $c = 0.2$, $A = 1$, $t = 20$).

	I_1	I_2	I_3	L_2	L_∞
CNSFY-I	2.62213422	2.34884116	0.78523449	0.03472327	0.02500833
CNSFY-II	2.62205755	2.34886496	0.78502878	0.01553615	0.01191636
[2]	2.6219211	2.3559093	0.7851130	0.00341485	0.00249360
[38]	2.6219184	2.3559327	0.7851364	0.00339086	0.00247031
[39]	2.6220106	2.3561319	0.2169597	0.0020868	0.0015139
[41]	2.6220458	2.3561835	0.7853869	0.01427724	0.00908006
[46]	2.6220923	2.3598903	0.7854785	0.00196046	0.00133416



Şekil 4-4: CNSFY-I : Tek soliter dalga hareketi ($p = 4$, $c = 0.2$, $A = 1$)

Çizelge 4.20-4.23’de Tek soliter dalganın CNSFY-I ve CNSFY-II ile p ’nin 2,3,4,6,8,10 gibi en çok kullanılan değerleri için c ’nin farklı değerleri alınarak A genlik değerleri hesaplandı ve k değeri sabit tutulup h değeri değiştirilerek hata normlarının nasıl değiştiği gözlemlendi. Bu çizelgeler ile c değeri arttığında h ve k sabitken hatanın arttığı, h sabitken k artırıldığında

hatanın az farkla da olsa arttığı , k sabitken h arttığında hatanın daha fazla arttığı görülmüştür. Aynı c değerleri için p değeri büyüdükçe genlik de büyüdüğünden hatanın da arttığı görüldü.

Çizelge 4.20: Tek soliter dalganın CNSFY-I ile $p = 2,3,4$, $t = 20$ ve $x \in [0,80]$ için farklı c ve A değerlerinde elde edilen hata normları.

		$p = 2$			$p = 3$		$p = 4$		
c		0.03	0.1	0.3	0.03	0.1	0.03	0.1	0.3
A		0.24	0.44	0.77	0.46	0.69	0.62	0.84	1.10
h	k								
		$L_2 \times 10^2$							
0.1	0.01	0.03330	0.20221	1.06720	0.01177	0.58497	0.2507	1.1240	4.54697
0.2	0.01	0.13252	0.80518	4.24165	0.46591	2.30563	0.9808	4.3233	17.2822
0.1	0.05	0.03331	0.20276	1.09441	0.11782	0.58698	0.2508	1.1284	4.71449
0.2	0.05	0.13253	0.80571	4.26768	0.46599	2.30749	0.9809	4.3272	17.42853
0.1	0.2	0.03344	0.21148	1.52465	0.11839	0.61862	0.2522	1.1985	7.62435
		$L_\infty \times 10^2$							
0.1	0.01	2.11343	0.12991	0.66678	0.08150	0.40880	0.1811	0.8258	3.23785
0.2	0.01	0.08414	0.51300	2.64037	0.32192	1.58525	0.7076	3.1536	12.0736
0.1	0.05	0.02113	0.13027	0.68403	0.08152	0.41020	0.1821	0.8290	3.35685
0.2	0.05	0.08415	0.51334	2.65687	0.32194	1.58653	0.7076	3.1564	12.17301
0.1	0.2	0.02121	0.13590	0.95723	0.08191	0.43229	0.1831	0.8802	5.44649

Çizelge 4.21: Tek soliter dalganın CNSFY-II ile $p = 2,3,4$, $t = 20$ ve $x \in [0,80]$ için farklı c ve A değerlerinde elde edilen hata normları.

		$p = 2$			$p = 3$		$p = 4$		
c		0.03	0.1	0.3	0.03	0.1	0.03	0.1	0.3
A		0.24	0.44	0.77	0.46	0.69	0.62	0.84	1.10
h	k								
		$L_2 \times 10^3$							
0.1	0.01	0.253462	1.384793	4.702315	0.744689	3.089220	1.373941	4.809660	11.80915
0.2	0.01	1.014617	5.528568	18.69470	2.984049	12.31385	5.509354	19.13486	46.64717
0.1	0.05	0.2535105	1.388603	4.940777	0.744894	3.103526	1.374428	4.842428	13.38832
0.2	0.05	1.014665	5.532260	18.92590	2.984244	12.54445	5.509809	19.16575	48.13351
0.1	0.2	0.2542748	1.449728	8.984623	0.7481169	3.336476	1.382109	5.384590	42.36067
		$L_\infty \times 10^3$							
0.1	0.01	0.2420021	1.179906	3.292816	0.8418954	2.710295	1.753842	4.310319	9.334380
0.2	0.01	0.9474332	4.701201	13.05160	3.401953	10.75888	6.715416	16.81375	36.40692
0.1	0.05	0.240370	1.182707	3.451129	0.8420674	2.721956	1.754291	4.338380	10.47986
0.2	0.05	0.9474639	4.703932	13.20637	3.402116	10.94649	6.715862	16.83932	37.50879
0.1	0.2	0.2425818	1.226497	5.947524	0.8447535	2.904733	1.761309	4.780720	30.44606

Çizelge 4.22: Tek soliter dalğanın CNSFY-I ile $p = 6, 8, 10, t = 20$ ve $x \in [0,80]$ için farklı c ve A değerlerinde elde edilen hata normları.

		$p = 6$		$p = 8$		$p = 10$	
		c					
		A					
h	k						
		$L_2 \times 10^2$					
0.1	0.01	0.06332	2.53161	1.11011	4.10155	1.56774	5.34474
0.2	0.01	2.33540	8.63667	3.52351	10.22563	3.67747	4.29216
0.1	0.05	0.63348	2.54330	1.11060	4.12274	1.56848	5.37625
0.2	0.05	2.33561	8.64546	3.52383	10.2382	3.67786	4.30654
0.1	0.2	0.63752	2.73365	1.11834	4.48682	1.58036	5.97412
		$L_\infty \times 10^2$					
0.1	0.01	0.48895	1.96264	0.87825	3.27620	1.23651	4.39446
0.2	0.01	1.69673	6.63114	2.44931	7.81387	3.02257	3.90486
0.1	0.05	0.48915	1.97167	0.87863	3.29287	1.23711	4.42021
0.2	0.05	1.69688	6.63788	2.44954	7.82346	3.02289	3.91592
0.1	0.2	0.49224	2.11926	0.88474	3.58042	1.24667	4.91338

Çizelge 4.23: Tek soliter dalğanın CNSFY-II ile $p = 6, 8, 10, t = 20$ ve $x \in [0,80]$ için farklı c ve A değerlerinde elde edilen hata normları.

		$p = 6$		$p = 8$		$p = 10$	
		c					
		A					
h	k						
		$L_2 \times 10^2$					
0.1	0.01	0.281910	0.802107	0.434904	1.097478	0.5876831	1.375460
0.2	0.01	1.129786	3.174234	1.733752	4.266319	2.294512	4.954646
0.1	0.05	0.282052	0.811452	0.435186	1.115919	0.588150	1.405899
0.2	0.05	1.129913	3.182730	1.733986	4.282171	2.294841	4.977817
0.1	0.2	0.2843048	0.9720172	0.4396909	1.447426	0.5956488	1.981780
		$L_\infty \times 10^2$					
0.1	0.01	0.400863	0.7480558	0.6463372	1.055487	0.8661049	1.353140
0.2	0.01	1.582314	2.926169	2.539767	4.032627	3.325032	4.822540
0.1	0.05	0.401018	0.756780	0.646681	1.073446	0.866704	1.383006
0.2	0.05	1.582454	2.933932	2.540066	4.048211	3.325533	4.847676
0.1	0.2	0.4034418	0.8967838	0.6502821	1.369729	0.876437	1.894881

Çizelge 4.24: $p = 2, c = 1/32$ ve $A = 0.25$ değerleri için farklı t zamanlarında CNSFY-I ile elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları ile yakınsaklık mertebesi

t	$h = k$	L_2	$Mertebe$ (L_2)	L_∞	$Mertebe$ (L_∞)	CPU (s)
5	0.2	3.529128×10^{-4}		2.185330×10^{-4}		0.571485
	0.1	8.871685×10^{-5}	1.9920	5.488939×10^{-5}	1.9933	1.397925
	0.05	2.220994×10^{-5}	1.9980	1.373847×10^{-5}	1.9983	5.762554
	0.025	5.554409×10^{-6}	1.9995	3.435679×10^{-6}	1.9996	44.359288
	0.0125	1.388723×10^{-6}	1.9999	8.591122×10^{-7}	1.9997	299.427563
10	0.2	7.056800×10^{-4}		4.405147×10^{-4}		0.750447
	0.1	1.773855×10^{-4}	1.9921	1.107366×10^{-4}	1.9921	1.821124
	0.05	4.440713×10^{-5}	1.9980	2.777845×10^{-5}	1.9951	11.468463
	0.025	1.110559×10^{-5}	1.9995	6.946651×10^{-6}	1.9996	79.435426
	0.0125	2.776635×10^{-6}	1.9999	1.736791×10^{-6}	1.9999	580.505686
15	0.2	1.058180×10^{-3}		6.635794×10^{-4}		0.778082
	0.1	2.659660×10^{-4}	1.9923	1.677838×10^{-4}	1.9837	2.961583
	0.05	6.658099×10^{-5}	1.9981	4.199579×10^{-5}	1.9983	16.339180
	0.025	1.665085×10^{-5}	1.9995	1.050441×10^{-5}	1.9992	154.312116
	0.0125	4.163064×10^{-6}	1.9999	2.626425×10^{-6}	1.9998	891.953480
20	0.2	1.410336×10^{-3}		8.959981×10^{-4}		1.133634
	0.1	3.544332×10^{-4}	1.9925	2.250137×10^{-4}	1.9935	4.499541
	0.05	8.872489×10^{-5}	1.9981	5.631718×10^{-5}	1.9984	20.283111
	0.025	2.218853×10^{-5}	1.9995	1.409052×10^{-5}	1.9989	158.773487
	0.0125	5.547588×10^{-6}	1.9999	3.522889×10^{-6}	1.9999	1177.092184

Çizelge 4.25: $p = 2, c = 1/32$ ve $A = 0.25$ değerleri için farklı t zamanlarında CNSFY-II ile elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları ile yakınsaklık mertebesi

t	$h = k$	L_2	Mertebe (L_2)	L_∞	Mertebe (L_∞)	CPU (s)
5	0.2	2.727812×10^{-4}		2.443234×10^{-4}		0.743597
	0.1	6.811416×10^{-5}	2.0017	6.089832×10^{-5}	2.0043	1.634731
	0.05	1.702348×10^{-5}	2.0004	1.521330×10^{-5}	2.0011	6.274813
	0.025	4.255555×10^{-6}	2.0001	3.802621×10^{-6}	2.0003	49.997377
	0.0125	1.063869×10^{-6}	2.0000	9.509285×10^{-7}	1.9996	294.949303
10	0.2	5.443023×10^{-4}		4.876391×10^{-4}		1.324531
	0.1	1.359278×10^{-4}	2.0016	1.253613×10^{-4}	1.9597	2.622900
	0.05	3.397273×10^{-5}	2.0004	3.131130×10^{-5}	2.0013	12.828863
	0.025	8.492607×10^{-6}	2.0001	7.826017×10^{-6}	2.0003	82.095407
	0.0125	2.123116×10^{-6}	2.00000	1.956478×10^{-6}	2.0000	592.796784
15	0.2	8.133054×10^{-4}		7.689131×10^{-4}		1.058276
	0.1	2.031395×10^{-4}	2.0013	1.913964×10^{-4}	2.0063	3.370553
	0.05	5.077316×10^{-5}	2.0003	4.779745×10^{-5}	2.0016	20.959101
	0.025	1.269256×10^{-5}	2.0001	1.196198×10^{-5}	1.9985	135.422479
	0.0125	3.173093×10^{-6}	2.0000	2.990315×10^{-6}	2.0001	886.595057
20	0.2	10.78544×10^{-4}		10.18255×10^{-4}		1.587792
	0.1	2.694476×10^{-4}	2.0010	2.570247×10^{-4}	1.9861	5.329074
	0.05	6.734995×10^{-5}	2.0003	6.433350×10^{-5}	1.9983	27.124982
	0.025	1.683674×10^{-5}	2.0001	1.608973×10^{-5}	1.9994	172.080075
	0.0125	4.209138×10^{-6}	2.0000	4.022862×10^{-6}	1.9998	1181.215039

Çizelge 4.24 ve Çizelge 4.25’de $p = 2, c = \frac{1}{32}, A = 0.25$ için CNSFY-I ve CNSFY-II ile elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının yakınsaklık mertebesi ve CPU(s) değeri hesaplandı. Mertebenin 2 civarında olduğu görüldü.

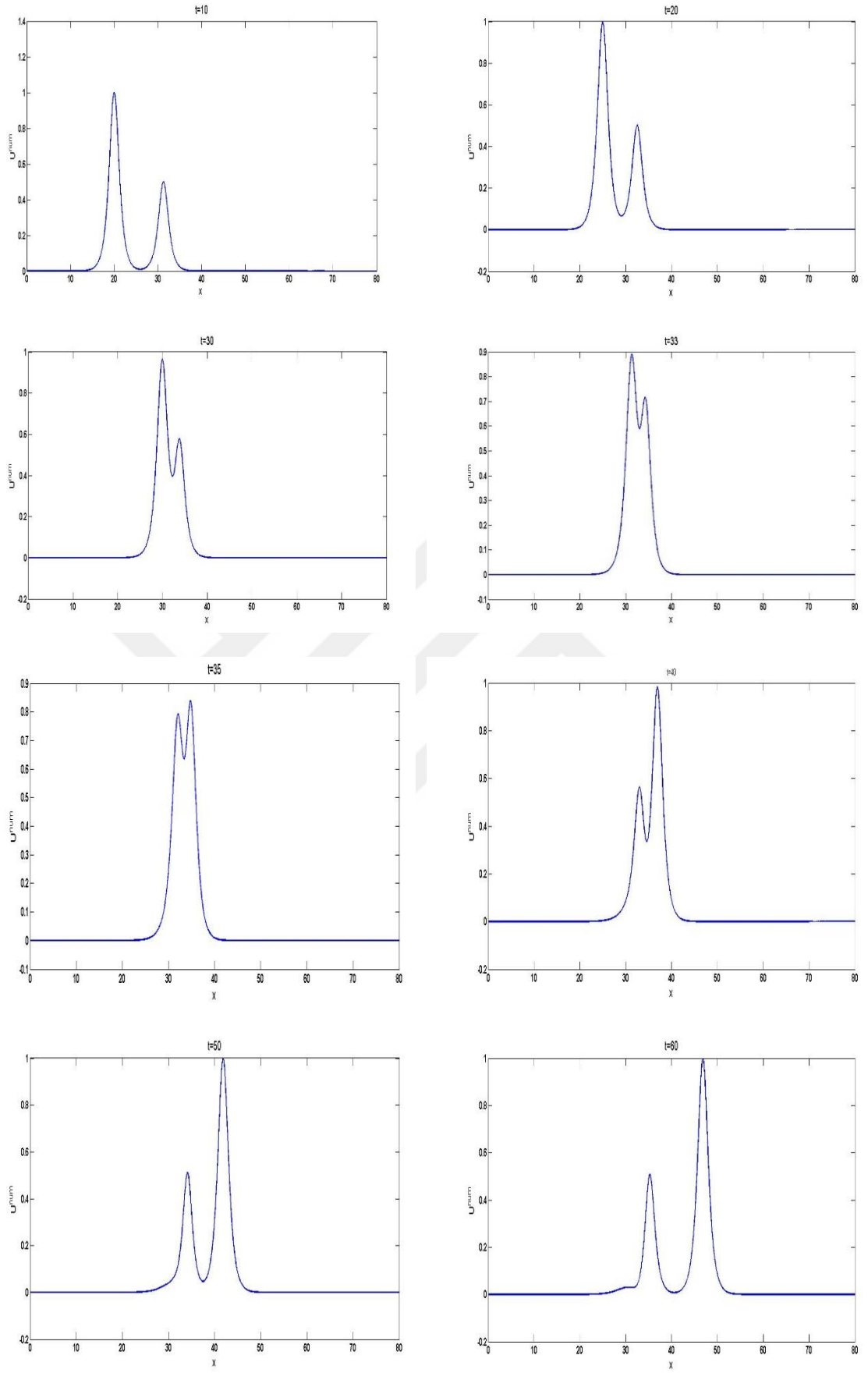
4.5.2 İki soliter dalgaının etkileşimi

İkinci olarak, model Problem 2 olarak tanıtilan iki soliter dalgaının etkileşimi probleminin $p = 2, 3$ ve 4 için farklı genlik (A), konum (h) ve zaman (k) adımları için elde edilen korunum sabitleri ve farklı çalışmalarla karşılaştırmaları Çizelge 4.26-4.34’ de verildi. Ayrıca yine farklı p ve genlik değerleri için problemin davranışını gösteren grafikler Şekil 4.5-4.7’ de sunuldu.

Çizelge 4.26: İki soliter dalgaının CNSFY-I ile hesaplanan korunum sabitleri ($p = 2$, $c_1 = 0.5$, $c_2 = 0.125$, $x_1 = 15$, $x_2 = 30$, $x \in [0, 80]$, $h = 0.1$, $h = 0.05$ ve $k = 0.025$, $A_1 = 1$, $A_2 = 0.5$, $t = 0$ (10) 60).

	$h = 0.1$			$h = 0.05$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
$t = 0$	4.712388	3.329463	1.416670	4.712388	3.332365	1.416670
$t = 10$	4.712394	3.329468	1.416680	4.712390	3.332363	1.416669
$t = 20$	4.712376	3.329404	1.416603	4.712385	3.332346	1.416648
$t = 30$	4.711863	3.328039	1.414148	4.712255	3.331988	1.416008
$t = 40$	4.712343	3.328880	1.415556	4.712380	3.332214	1.416388
$t = 50$	4.712796	3.329848	1.416832	4.712491	3.332457	1.416705
$t = 60$	4.712714	3.329786	1.416802	4.712469	3.332439	1.416696
	$\Delta I_1 = 5.424788 \times 10^{-6}$			$\Delta I_1 = 1.351845 \times 10^{-6}$		
	$\Delta I_2 = 5.372368 \times 10^{-6}$			$\Delta I_2 = 1.245739 \times 10^{-6}$		
	$\Delta I_3 = 2.209916 \times 10^{-6}$			$\Delta I_3 = 4.422277 \times 10^{-7}$		

Çizelge 4.26’da İki soliter dalgaının CNSFY-I ile $h = 0.1$ ve $h = 0.05$ ’deki I_1, I_2, I_3 korunum sabitlerinin zamana göre değişimleri ve değişimlerin net olarak görülmesi için $\Delta I_1, \Delta I_2, \Delta I_3$ değerleri hesaplandı. Çizelgeden görüldüğü üzere $\Delta I_1, \Delta I_2, \Delta I_3$ değerleri oldukça küçüktür. Bu da korunum sabitlerindeki değişimin neredeyse olmadığını göstermektedir. $h = 0.1$ ve $h = 0.05$ değerleri için elde edilen invaryant değişimleri karşılaştırıldığında h değeri küçüldükçe değişimlerinin de azaldığı görülmüştür. Şekil 4.5’de $p = 2$, $h = 0.1$ değeri için iki soliter dalgaının etkileşiminin hareketi verilmiştir. Şekilde genliği büyük olan dalga başlangıçta genliği küçük olan dalgaının gerisinde iken zaman ilerledikçe genliği küçük olan dalgayı yakalayarak etkileşime girdiği ve sonrasında hemen hemen genliğini koruyarak küçük dalgaının önüne geçtiği ve sağa doğru ilerlediği görülmektedir.



Şekil 4-5: CNSFY-I: İki soliter dalganın etkileşimi
 $(p = 2, c_1 = 0.5, c_2 = 0.125, A_1 = 1, A_2 = 0.5)$

Çizelge 4.27: İki soliter dalğanın CNSFY-II ile hesaplanan korunum sabitleri ($p = 2$, $c_1 = 0.5$, $c_2 = 0.125$, $x_1 = 15$, $x_2 = 30$, $x \in [0,80]$, $h = 0.1$, $h = 0.05$ ve $k = 0.025$, $A_1 = 1$, $A_2 = 0.5$, $t = 0$ (10) 60).

	$h = 0.1$			$h = 0.05$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
$t = 0$	4.712388	3.329463	1.416670	4.712388	3.332365	1.416670
$t = 10$	4.712390	3.329510	1.416668	4.712390	3.332366	1.416669
$t = 20$	4.712390	3.329524	1.416667	4.712390	3.332368	1.416667
$t = 30$	4.712390	3.330402	1.416647	4.712390	3.332578	1.416647
$t = 40$	4.712390	3.329467	1.416654	4.712390	3.332345	1.416655
$t = 50$	4.712390	3.328989	1.416665	4.712390	3.332345	1.416665
$t = 60$	4.712390	3.329141	1.416664	4.712390	3.332269	1.416664
	$\Delta I_1 = 1.956808 \times 10^{-8}$			$\Delta I_1 = 1.993178 \times 10^{-8}$		
	$\Delta I_2 = 5.373487 \times 10^{-6}$			$\Delta I_2 = 1.594349 \times 10^{-6}$		
	$\Delta I_3 = 9.428830 \times 10^{-8}$			$\Delta I_3 = 9.313884 \times 10^{-8}$		

Çizelge 4.27’de İki soliter dalğanın CNSFY-II ile $h = 0.1$ ve $h = 0.05$ ’deki I_1, I_2, I_3 korunum sabitlerinin zamana göre değişimleri ve değişimlerinin incelenmesi için $\Delta I_1, \Delta I_2, \Delta I_3$ değerleri hesaplandı. Çizelgeden görüldüğü üzere $\Delta I_1, \Delta I_2, \Delta I_3$ değerleri oldukça küçüktür. Bu da korunum sabitlerinde hemen hemen değişimin olmadığını göstermektedir. $h = 0.1$ ve $h = 0.05$ değerleri için elde edilen invaryant değişimleri karşılaştırıldığında h değeri küçüldükçe değişimlerin de azaldığı görülmüştür.

Çizelge 4.28: İki soliter dalğanın CNSFY-I ve CNSFY-II ile elde edilen korunum sabitlerinin diğer çalışmalardaki sonuçlar ile karşılaştırılması ($p = 2$, $c_1 = 0.5$, $c_2 = 0.125$, $A_1 = 1$, $A_2 = 0.5$, $t = 60$).

	I_1	I_2	I_3
CNSFY-I	4.712714	3.329786	1.416802
CNSFY-II	4.712390	3.329141	1.416664
[2]	4.712374	3.333329	1.416664
[33]	4.712390	3.333212	1.416664
[38]	4.71237	3.33332	1.41666
[49]	4.71239	3.33333	1.41666

Çizelge 4.28’de İki soliter dalğanın CNSFY-I ve CNSFY-II ile hesaplanan korunum sabiti değerlerinin literatürdeki diğer çalışmalarda hesaplanan değerler ile karşılaştırılması yapılmıştır. Çizelgeden her iki yöntem için hesaplanan invaryant değerlerinin birbiri ile ve diğer çalışmalarla uyumlu olduğu görülmektedir.

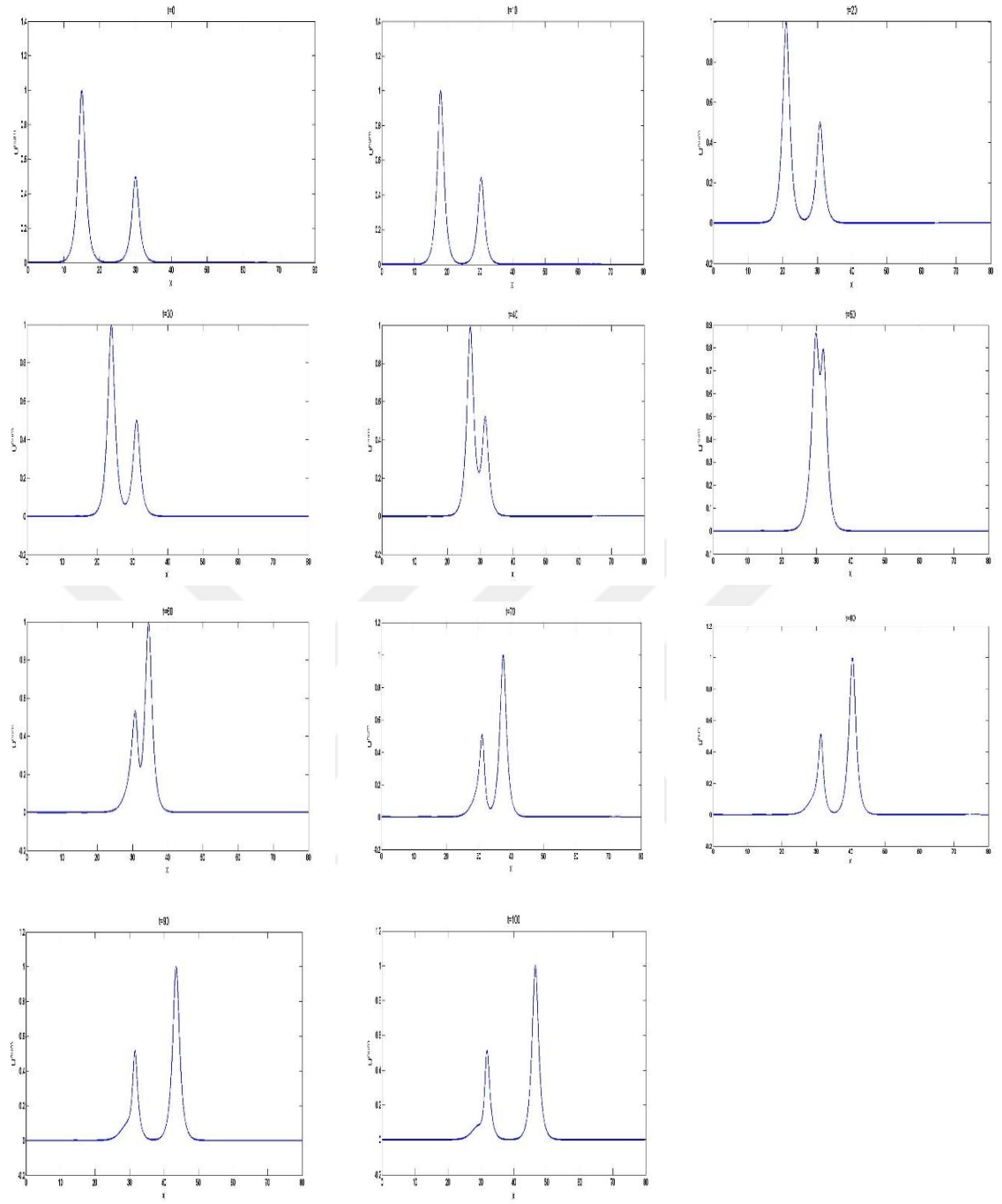
Çizelge 4.29: İki soliter dalganın CNSFY-I ile hesaplanan korunum sabitleri ($p = 3, c_1 = 0.3, c_2 = 0.0375, x_1 = 15, x_2 = 30, h = 0.1, h = 0.05, k = 0.025, A_1 = 1, A_2 = 0.5, t = 0 (10) 100$).

	$h = 0.1$			$h = 0.05$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
$t = 0$	4.206546	3.073542	1.016366	4.206546	3.078298	1.016366
$t = 10$	4.206572	3.073582	1.016428	4.206548	3.078299	1.016369
$t = 20$	4.206572	3.073576	1.016418	4.206548	3.078297	1.016367
$t = 30$	4.206538	3.073491	1.016309	4.206548	3.078274	1.016338
$t = 40$	4.206057	3.072516	1.014881	4.206414	3.078020	1.015967
$t = 50$	4.203693	3.067793	1.005733	4.205828	3.076830	1.013650
$t = 60$	4.207180	3.073757	1.015796	4.206707	3.078351	1.016220
$t = 70$	4.208332	3.075068	1.016419	4.206994	3.078673	1.016366
$t = 80$	4.209303	3.075914	1.016588	4.207235	3.078881	1.016407
$t = 90$	4.209681	3.076215	1.016644	4.207326	3.078953	1.016420
$t = 100$	4.209398	3.075942	1.016592	4.207254	3.078883	1.016406
	$\Delta I_1 = 2.852289 \times 10^{-5}$			$\Delta I_1 = 7.078330 \times 10^{-6}$		
	$\Delta I_2 = 2.399552 \times 10^{-5}$			$\Delta I_2 = 5.858133 \times 10^{-6}$		
	$\Delta I_3 = 2.260693 \times 10^{-6}$			$\Delta I_3 = 3.986771 \times 10^{-7}$		

Çizelge 4.30: İki soliter dalganın CNSFY-II ile hesaplanan korunum sabitleri ($p = 3, c_1 = 0.3, c_2 = 0.0375, x_1 = 15, x_2 = 30, h = 0.1, h = 0.05, k = 0.025, A_1 = 1, A_2 = 0.5, t = 0 (10) 100$).

	$h = 0.1$			$h = 0.05$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
$t = 0$	4.206546	3.073542	1.016366	4.206546	3.078298	1.016366
$t = 10$	4.206547	3.073643	1.016365	4.206547	3.078303	1.016366
$t = 20$	4.206547	3.073652	1.016365	4.206547	3.078303	1.016365
$t = 30$	4.206547	3.073684	1.016364	4.206547	3.078310	1.016364
$t = 40$	4.206547	3.074177	1.016362	4.206547	3.078435	1.016362
$t = 50$	4.206547	3.077320	1.016337	4.206547	3.079210	1.016337
$t = 60$	4.206547	3.073044	1.016361	4.206547	3.078144	1.016361
$t = 70$	4.206547	3.072292	1.016362	4.206547	3.077949	1.016362
$t = 80$	4.206547	3.071596	1.016362	4.206547	3.077768	1.016362
$t = 90$	4.206547	3.071360	1.016361	4.206547	3.077707	1.016361
$t = 100$	4.206547	3.071630	1.016360	4.206547	3.077778	1.016360
	$\Delta I_1 = 9.330417 \times 10^{-9}$			$\Delta I_1 = 9.494856 \times 10^{-9}$		
	$\Delta I_2 = 1.912353 \times 10^{-6}$			$\Delta I_2 = 5.19872 \times 10^{-6}$		
	$\Delta I_3 = 5.896827 \times 10^{-8}$			$\Delta I_3 = 5.905234 \times 10^{-8}$		

Çizelge 4.29 ve 4.30’da, Çizelge 4.26 ve 4.27’deki gibi İki soliter dalganın sırasıyla CNSFY-I ve CNSFY-II ile $p = 3, h = 0.1$ ve $h = 0.05$ için I_1, I_2, I_3 korunum sabitlerinin zamana göre değişimleri ve değişimlerinin görülebilmesi için $\Delta I_1, \Delta I_2, \Delta I_3$ değerleri hesaplandı. Her iki çizelgeden de görüldüğü üzere invaryantlardaki değişimler yani $\Delta I_1, \Delta I_2, \Delta I_3$ değerleri oldukça küçüktür. Her iki yöntem için de $h = 0.1$ ve $h = 0.05$ değerleri için hesaplanan invaryant değişimleri karşılaştırıldığında h değeri küçüldükçe değişimlerin de oldukça azaldığı görülmektedir. Ayrıca CNSFY-II ile elde edilen $\Delta I_1, \Delta I_2, \Delta I_3$ değişimlerinin CNSFY-I ile elde edilen değişimlerden daha az olduğu açıktır. Şekil 4.6’da $p = 3, h = 0.1$ değeri için İki soliter dalganın etkileşiminin hareketi verilmiştir. Şekilde $p = 2$ için sergilenen benzer davranışın $p = 3$ için de sergilendiği yani genliği büyük olan dalganın başlangıçta geride iken zaman ilerledikçe genliği küçük olan dalgayı yakalayarak etkileşime girdiği ve sonrasında hemen hemen genliğini koruyarak küçük dalganın önüne geçtiği ve sağa doğru ilerlediği görülmektedir.



Şekil 4-6: CNSFY-I: İki soliter dalganın etkileşimi
 $(p = 3, c_1 = 0.3, c_2 = 0.0375, A_1 = 1, A_2 = 0.5)$

Çizelge 4.31: İki soliter dalganın farklı zamanlarda CNSFY-I ve CNSFY-II ile elde edilen korunum sabitlerinin diğer çalışmalardaki sonuçlar ile karşılaştırması ($p = 3$, $c_1 = 0.3$ ve $c_2 = 0.0375$, $A_1 = 1$, $A_2 = 0.5$).

t	0	10	20	40	60	90	100
CNSFY-I	4.206546	4.206572	4.206572	4.206057	4.207180	4.209681	4.209398
CNSFY-II	4.206546	4.206547	4.206547	4.206547	4.206547	4.206547	4.206547
I_1 [2]	4.206532	4.2065329	4.2065330	4.2065330	4.2065330	4.2065330	4.2065330
[38]	4.20653	4.20653	4.20653	4.20653	4.20653	4.20653	4.20653
[43]	4.206546	4.206547	4.206547	4.206547	4.206547	4.206547	4.206547
[49]	4.20655	4.20655	4.20655	4.20655	4.20655	4.20655	4.20655
CNSFY-I	3.073542	3.073582	3.073576	3.072516	3.073757	3.076215	3.075942
CNSFY-II	3.073542	3.073643	3.073652	3.074177	3.073044	3.071360	3.071630
I_2 [2]	3.0798892	3.0798892	3.0798892	3.0798892	3.0798892	3.0798892	3.0798892
[38]	3.07988	3.07988	3.07988	3.07988	3.07988	3.07988	3.07988
[43]	3.079827	3.079852	3.079856	3.080113	3.079829	3.079274	3.079338
[49]	3.97977	3.07986	3.07982	3.07986	3.07987	3.07974	3.07972
CNSFY-I	1.016366	1.016428	1.016418	1.014881	1.015796	1.016644	1.016592
CNSFY-II	1.016366	1.016365	1.016365	1.016362	1.016361	1.016361	1.016360
I_3 [2]	1.0163623	1.0163623	1.0163623	1.0163619	1.0163620	1.0163625	1.0163625
[38]	1.01636	1.01636	1.01636	1.01636	1.01636	1.01636	1.01636
[43]	1.016366	1.016365	1.016365	1.016362	1.016361	1.016361	1.016360
[49]	1.01634	1.01634	1.01634	1.01634	1.01633	1.01633	1.01634

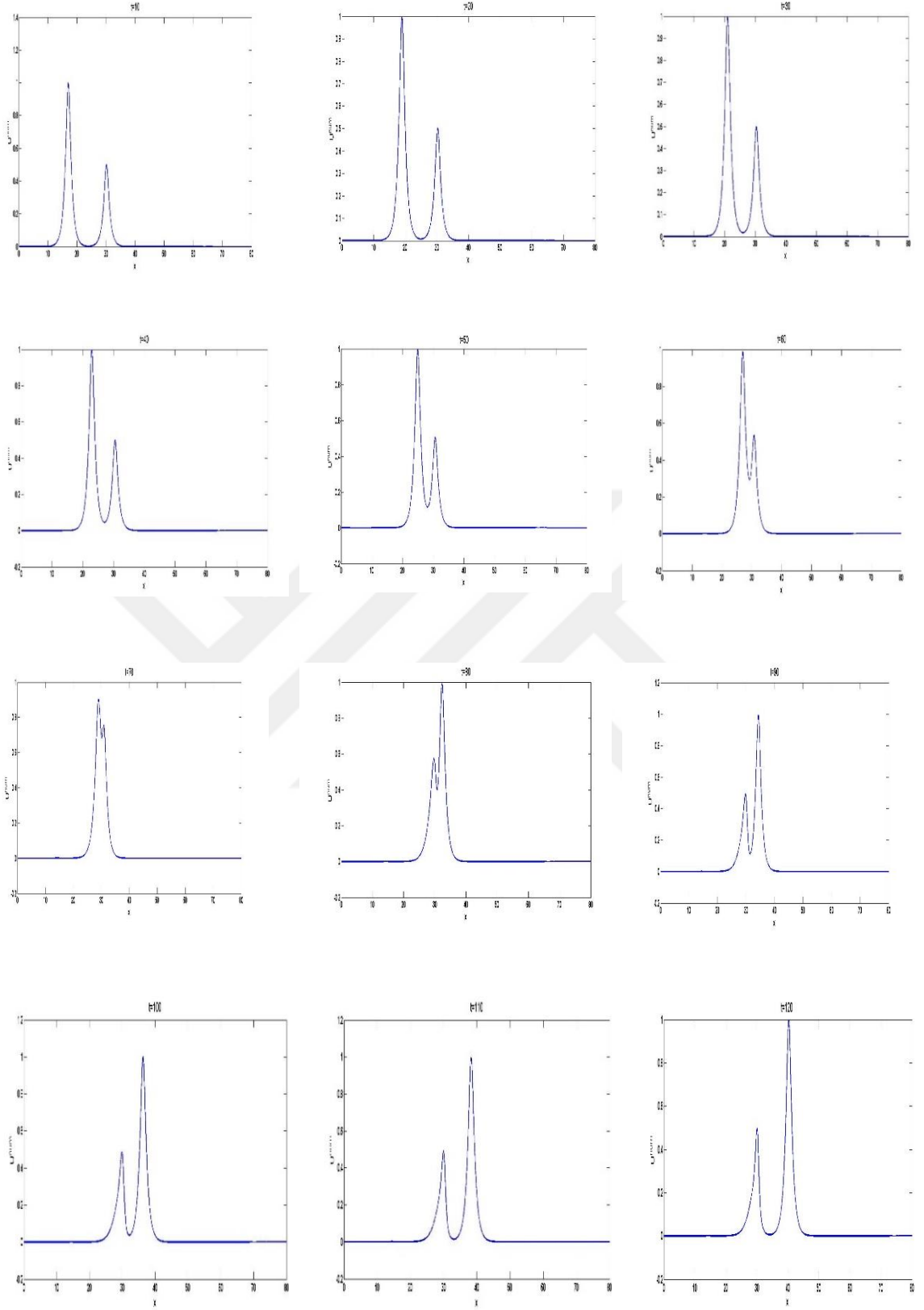
Çizelge 4.31’de İki soliter dalganın $p = 3$ için CNSFY-I ve CNSFY-II ile hesaplanan korunum sabiti değerlerinin literatürdeki diğer çalışmalarda hesaplanan değerler ile karşılaştırılması yapılmıştır. Çizelgeden her iki yöntem için hesaplanan invaryant değerlerinin birbiri ile ve diğer çalışmalarla yakın olduğu görülmektedir.

Çizelge 4.32: İki soliter dalğanın CNSFY-I ile hesaplanan korunum sabitleri ($p = 4, c_1 = 0.2, c_2 = 1/80, x_1 = 15, x_2 = 30, x \in [0,80], h = 0.1, h = 0.05$ ve $k = 0.025, A_1 = 1, A_2 = 0.5, t = 0 (10) 120$).

	$h = 0.1$			$h = 0.05$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
$t = 0$	3.933086	2.936338	0.797671	3.933086	2.943000	0.797671
$t = 10$	3.933162	2.936463	0.797853	3.933091	2.943008	0.797682
$t = 20$	3.933163	2.936461	0.797845	3.933091	2.943007	0.797681
$t = 30$	3.933162	2.936454	0.797832	3.933090	2.943004	0.797678
$t = 40$	3.933136	2.936393	0.797751	3.933082	2.942987	0.797656
$t = 50$	3.932934	2.936001	0.797236	3.933028	2.942883	0.797521
$t = 60$	3.931680	2.933738	0.794038	3.932695	2.942281	0.796669
$t = 70$	3.927359	2.925927	0.780810	3.931614	2.940308	0.793263
$t = 80$	3.933364	2.935566	0.795193	3.933175	2.942838	0.797097
$t = 90$	3.934769	2.937520	0.796793	3.933503	2.943282	0.797422
$t = 100$	3.935994	2.938598	0.796945	3.933809	2.943547	0.797457
$t = 110$	3.937351	2.939708	0.797036	3.934145	2.943820	0.797480
$t = 120$	3.938770	2.940873	0.797129	3.934495	2.944106	0.797501
	$\Delta I_1 = 4.736889 \times 10^{-5}$			$\Delta I_1 = 1.174190 \times 10^{-5}$		
	$\Delta I_2 = 3.778885 \times 10^{-5}$			$\Delta I_2 = 9.211763 \times 10^{-6}$		
	$\Delta I_3 = 4.521890 \times 10^{-6}$			$\Delta I_3 = 1.420636 \times 10^{-6}$		

Çizelge 4.33: İki soliter dalğanın CNSFY-II ile hesaplanan korunum sabitleri ($p = 4, c_1 = 0.2, c_2 = 1/80, x_1 = 15, x_2 = 30, x \in [0,80], h = 0.1, h = 0.05$ ve $k = 0.025, A_1 = 1, A_2 = 0.5, t = 0 (10) 120$).

	$h = 0.1$			$h = 0.05$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
$t = 0$	3.933086	2.936338	0.797671	3.933086	2.943000	0.797671
$t = 10$	3.933087	2.936524	0.797671	3.933087	2.943012	0.797671
$t = 20$	3.933087	2.936530	0.797671	3.933087	2.943012	0.797671
$t = 30$	3.933087	2.936539	0.797670	3.933087	2.943013	0.797670
$t = 40$	3.933087	2.936565	0.797670	3.933087	2.943018	0.797670
$t = 50$	3.933087	2.936728	0.797669	3.933087	2.943059	0.797669
$t = 60$	3.933087	2.937859	0.797668	3.933087	2.943350	0.797668
$t = 70$	3.933087	2.942197	0.797656	3.933087	2.944445	0.797655
$t = 80$	3.933087	2.936253	0.797667	3.933087	2.942934	0.797667
$t = 90$	3.933087	2.935707	0.797668	3.933087	2.942794	0.797668
$t = 100$	3.933087	2.935131	0.797668	3.933087	2.942642	0.797668
$t = 110$	3.933087	2.933728	0.797668	3.933087	2.942463	0.797668
$t = 120$	3.933087	2.933728	0.797667	3.933087	2.942272	0.797667
	$\Delta I_1 = 6.934375 \times 10^{-9}$			$\Delta I_1 = 7.050963 \times 10^{-9}$		
	$\Delta I_2 = 2.175029 \times 10^{-5}$			$\Delta I_2 = 6.073689 \times 10^{-6}$		
	$\Delta I_3 = 3.180059 \times 10^{-8}$			$\times \Delta I_3 = 3.20023010^{-8}$		



Şekil 4-7: CNSFY-I: İki soliter dalganın etkileşimi
 $(p = 4, c_1 = 0.2, c_2 = 1/80, A_1 = 1, A_2 = 0.5)$

İki soliter dalganın $p = 2$ ve $p = 3$ için sunulan çizelgelerine benzer olarak $p = 4, h = 0.1$ ve $h = 0.05$ için Çizelge 4.32 ve Çizelge 4.33’de sırasıyla CNSFY-I ve CNSFY-II ile I_1, I_2, I_3 korunum sabitlerinin zamana göre değişimleri ve $\Delta I_1, \Delta I_2, \Delta I_3$ değerleri hesaplandı. Her iki çizelgeden de görüldüğü üzere invaryantlardaki değişimler yani $\Delta I_1, \Delta I_2, \Delta I_3$ değerleri oldukça küçüktür. Her iki yöntem için de $h = 0.1$ ve $h = 0.05$ değerleri için hesaplanan invaryant değişimleri karşılaştırıldığında h değeri küçüldükçe değişimlerin de oldukça azaldığı görülmektedir. Ayrıca CNSFY-II ile elde edilen $\Delta I_1, \Delta I_2, \Delta I_3$ değişimlerinin CNSFY-I ile elde edilen değişimlerden daha az olduğu açıktır. Örneğin, CNSFY-I ile hesaplanan ΔI_1 değeri 4.736889×10^{-5} iken CNSFY-II ile hesaplanan ΔI_1 değeri 6.934375×10^{-9} dir. Şekil 4.7’de $p = 4, h = 0.1$ değeri için İki soliter dalganın etkileşiminin hareketi verilmiştir. Şekilde $p = 2$ ve $p = 3$ için sergilenen davranışın benzer şekilde $p = 4$ için de sergilendiği yani genliği büyük olan dalganın başlangıçta geride iken zaman ilerledikçe genliği küçük olan dalgayı yakalayarak etkileşime girdiği ve sonrasında hemen hemen genliğini koruyarak küçük dalganın önüne geçtiği ve sağa doğru ilerlediği görülmektedir.

Çizelge 4.34: İki soliter dalganın CNSFY-I ve CNSFY-II ile elde edilen korunum sabitlerinin diğer çalışmalardaki sonuçlar ile karşılaştırılması ($p = 4$, $c_1 = 0.2$, $c_2 = 1/80$, $A_1 = 1$, $A_2 = 0.5$).

	t	0	10	20	40	60	80	100	120
I_1	CNSFY-I	3.933086	3.933162	3.933163	3.933136	3.931680	3.933364	3.935994	3.938770
	CNSFY-II	3.933086	3.933087	3.933087	3.933087	3.933087	3.933087	3.933087	3.933087
	[2]	3.933073	3.933073	3.933073	3.933073	3.933073	3.9330738	3.9330738	3.9330739
	[43]	3.933086	3.933087	3.933087	3.933087	3.933087	3.933087	3.933087	3.933087
	[49]	3.93309	3.93309	3.93309	3.93309	3.93309	3.93309	3.93309	3.93308
	CNSFY – I	2.936338	2.936463	2.936461	2.936393	2.933738	2.935566	2.938598	2.940873
	CNSFY-II	2.936338	2.936524	2.936530	2.936565	2.937859	2.936253	2.935131	2.933728
	[2]	2.945240	2.945240	2.945240	2.945240	2.945240	2.9452406	2.9452406	2.9452406
	[43]	2.945106	2.945152	2.945155	2.945174	2.945669	2.945329	2.944812	2.944439
	[49]	2.94512	2.94518	2.94517	2.94515	2.94505	2.94506	2.94508	2.94511
I_3	CNSFY – I	0.797671	0.797853	0.797845	0.797751	0.794038	0.795193	0.796945	0.797129
	CNSFY-I	0.797671	0.797671	0.797671	0.797670	0.797668	0.797667	0.797668	0.797667
	[2]	0.797668	0.797668	0.797668	0.797668	0.797668	0.7976679	0.7976684	0.7976684
	[43]	0.797671	0.797671	0.797670	0.797670	0.797668	0.797667	0.797668	0.797668
	[49]	0.797614	0.797612	0.797611	0.797612	0.797622	0.797613	0.797611	0.797611

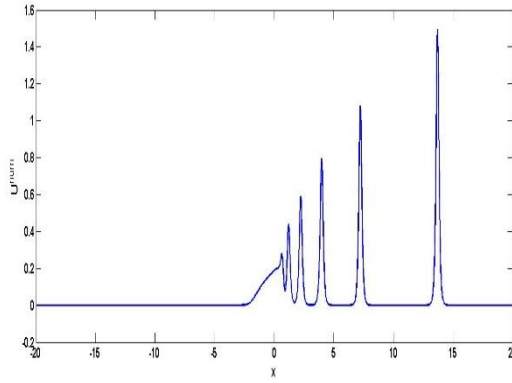
Çizelge 4.34’de İki soliter dalganın $p = 4$ için CNSFY-I ve CNSFY-II ile hesaplanan korunum sabiti değerlerinin literatürdeki diğer çalışmalarda hesaplanan değerler ile karşılaştırılması yapılmıştır. Çizelgeden her iki yöntem için hesaplanan invaryant değerlerinin birbiri ile ve diğer çalışmalarla oldukça uyumlu olduğu görülmektedir.

4.5.3 Maxvillian başlangıç şartlı dalga hareketi

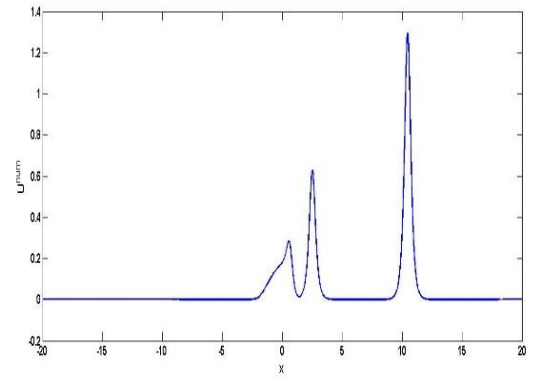
Son olarak, model Problem 3 olarak tanımlanan Maxvillian başlangıç şartlı problemin $p = 2, 3, 4, 5$ ve $\mu = 0.01, \mu = 0.025, \mu = 0.05, \mu = 0.1$ değerleri için elde edilen korunum sabitleri ve farklı çalışmalarda karşılaştırmaları Çizelge 4.35-4.42’ de verildi. Ayrıca yine farklı p ve μ değerleri için problemin davranışını gösteren grafikler Şekil 4.8-4.11’ de sunuldu.

Çizelge 4.35: Maxvellian başlangıç şartlı problemin CNSFY-I ve CNSFY-II ile elde edilen korunum sabitleri ($p = 2, h = 0.025, k = 0.01, x \in [-20, 20], \mu = 0.01, 0.025, 0.05, 0.1$).

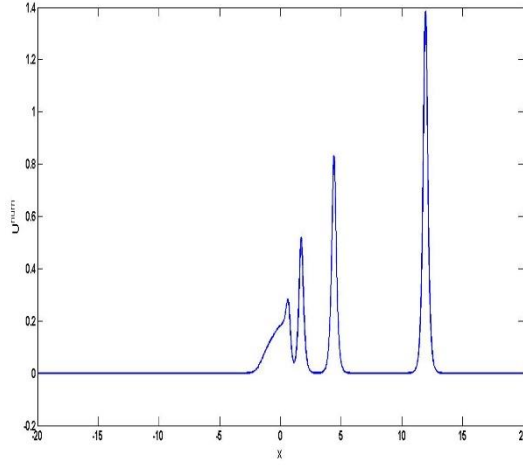
		CNSFY-I			CNSFY-II		
μ	t	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.01	0	1.772454	1.265839	0.886227	1.772454	1.265839	0.886227
	2	1.776557	1.277743	0.926581	1.772454	1.257087	0.888249
	4	1.778048	1.279524	0.928091	1.772454	1.254288	0.886779
	6	1.778748	1.279666	0.926918	1.772454	1.252771	0.885286
	8	1.779160	1.279259	0.925264	1.772454	1.250783	0.883802
	10	1.779479	1.278756	0.923548	1.772454	1.251751	0.883802
	12	1.779618	1.278078	0.921763	1.772454	1.250006	0.880862
		$\Delta I_1 = 5.969925 \times 10^{-4}$			$\Delta I_1 = 1.480297 \times 10^{-16}$		
		$\Delta I_2 = 1.019854 \times 10^{-3}$			$\Delta I_2 = 1.319457 \times 10^{-3}$		
		$\Delta I_3 = 2.961371 \times 10^{-3}$			$\Delta I_3 = 4.470585 \times 10^{-4}$		
0.025	0	1.772454	1.284627	0.886227	1.772454	1.284627	0.886227
	2	1.774094	1.289392	0.901692	1.772454	1.281044	0.887059
	4	1.774736	1.290383	0.902880	1.772454	1.279990	0.886901
	6	1.774973	1.290574	0.902873	1.772454	1.279664	0.886731
	8	1.775195	1.290710	0.902804	1.772454	1.279350	0.886561
	10	1.775277	1.290697	0.902650	1.772454	1.279208	0.886391
	12	1.775332	1.290645	0.902473	1.772454	1.279090	0.886221
		$\Delta I_1 = 2.398682 \times 10^{-4}$			$\Delta I_1 = 1.480297 \times 10^{-16}$		
		$\Delta I_2 = 5.014594 \times 10^{-4}$			$\Delta I_2 = 4.614268 \times 10^{-4}$		
		$\Delta I_3 = 1.353850 \times 10^{-3}$			$\Delta I_3 = 4.963024 \times 10^{-7}$		
0.05	0	1.772454	1.315941	0.886227	1.772454	1.315941	0.886227
	2	1.773357	1.318429	0.893711	1.772454	1.313888	0.886540
	4	1.773550	1.318695	0.893950	1.772454	1.313640	0.886517
	6	1.773743	1.318919	0.894100	1.772454	1.313380	0.886489
	8	1.773792	1.318962	0.894103	1.772454	1.313332	0.886461
	10	1.773811	1.318960	0.894074	1.772454	1.313314	0.886434
	12	1.773841	1.318962	0.894047	1.772454	1.313280	0.886406
		$\Delta I_1 = 1.155750 \times 10^{-4}$			$\Delta I_1 = 5.551115 \times 10^{-17}$		
		$\Delta I_2 = 2.517989 \times 10^{-4}$			$\Delta I_2 = 2.216990 \times 10^{-4}$		
		$\Delta I_3 = 6.516778 \times 10^{-4}$			$\Delta I_3 = 1.489913 \times 10^{-5}$		
0.1	0	1.772454	1.378567	0.886227	1.772454	1.378567	0.886227
	2	1.772948	1.379792	0.889528	1.772454	1.3777390	0.886315
	4	1.772982	1.379867	0.889605	1.772454	1.377388	0.886314
	6	1.773016	1.379891	0.889609	1.772454	1.377355	0.886310
	8	1.773062	1.379925	0.889618	1.772454	1.377309	0.886306
	10	1.773109	1.379961	0.889627	1.772454	1.377260	0.886302
	12	1.773144	1.379987	0.889632	1.772454	1.377225	0.886298
		$\Delta I_1 = 5.752044 \times 10^{-5}$			$\Delta I_1 = 5.551115 \times 10^{-17}$		
		$\Delta I_2 = 1.183116 \times 10^{-4}$			$\Delta I_2 = 1.118877 \times 10^{-4}$		
		$\Delta I_3 = 2.837967 \times 10^{-4}$			$\Delta I_3 = 5.938831 \times 10^{-6}$		



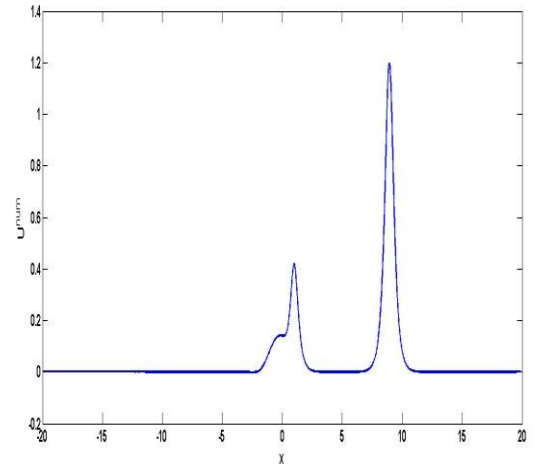
$$\mu = 0.01$$



$$\mu = 0.05$$



$$\mu = 0.025$$



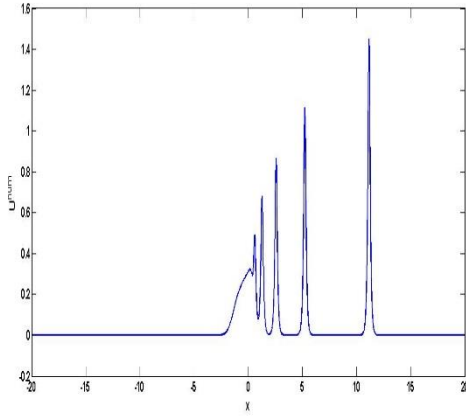
$$\mu = 0.1$$

Şekil 4-8: CNSFY-I: Maxvellian başlangıç şartlı dalga hareketi
($p = 2$, $h = 0.025$ ve $t = 12$)

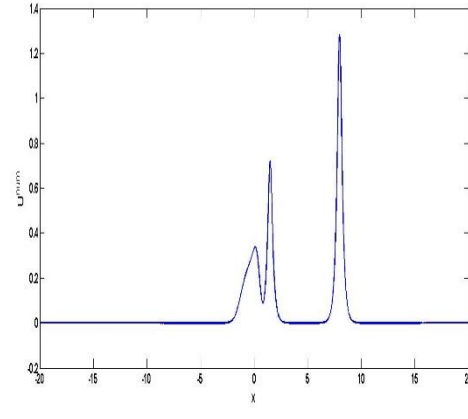
Çizelge 4.35’de $p = 2$ için farklı μ değerlerinde CNSFY-I ve CNSFY-II ye göre invariant değerleri hesaplandı ve bu değerlerin değişimini görebilmek için Problem 2’ deki gibi $\Delta I_1, \Delta I_2, \Delta I_3$ değerleri hesaplandı. Çizelgeden de görüldüğü üzere $\Delta I_1, \Delta I_2, \Delta I_3$ değerleri yeterince küçük olduğundan invariant değerlerin korunduğu açıktır. CNSFY-I ile CNSFY-II deki elde edilen sonuçlar birbiri ile karşılaştırıldığında CNSFY-II ile elde edilen değerlerin daha iyi korunduğu görülmektedir. Farklı μ değerleri için elde edilen $\Delta I_1, \Delta I_2, \Delta I_3$ ler karşılaştırıldığında μ değeri arttıkça $\Delta I_1, \Delta I_2, \Delta I_3$ değerlerinin azaldığı görülmektedir. Şekil 4.8’de $p = 2$ ve farklı μ değerleri için $t=12$ anında grafikleri sunulmuştur. Grafiklerden de görüldüğü üzere μ değeri arttıkça dalga sayısı azalmaktadır. CNSFY-I ve CNSFY-II ile elde edilen grafikler aynı olduğundan sadelik için yalnızca CNSFY-I yöntemi ile elde edilen sonuçlar için grafikler verilmiştir.

Çizelge 4.36: Maxvellian başlangıç şartlı problemin CNSFY-I ve CNSFY-II ile elde edilen korunum sabitleri ($p = 3$, $h = 0.025$, $k = 0.01$ ve $x \in [-20,20]$, $\mu = 0.01, 0.025, 0.05, 0.1$).

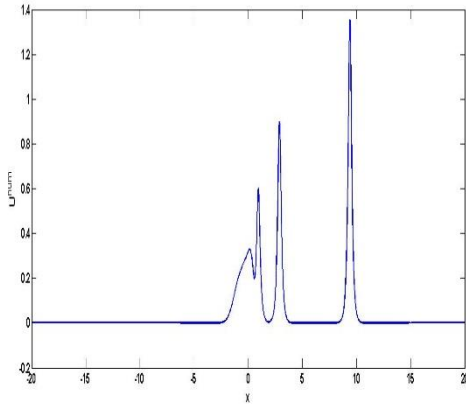
		CNSFY-I			CNSFY-II		
μ	t	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.01	0	1.772454	1.265839	0.792665	1.772454	1.265839	0.792665
	2	1.781356	1.286019	0.873922	1.772454	1.253875	0.793765
	4	1.785074	1.290559	0.878243	1.772454	1.249011	0.790591
	6	1.786779	1.291284	0.874993	1.772454	1.246468	0.787437
	8	1.788045	1.291253	0.870795	1.772454	1.244360	0.784337
	10	1.788633	1.290374	0.866092	1.772454	1.242864	0.781292
	12	1.789306	1.289526	0.861428	1.772454	1.241335	0.778299
		$\Delta I_1 = 1.404323 \times 10^{-3}$			$\Delta I_1 = 1.480297 \times 10^{-16}$		
		$\Delta I_2 = 1.973864 \times 10^{-3}$			$\Delta I_2 = 2.042042 \times 10^{-3}$		
		$\Delta I_3 = 5.730187 \times 10^{-3}$			$\Delta I_3 = 1.197186 \times 10^{-3}$		
0.025	0	1.772454	1.284627	0.792665	1.772454	1.284627	0.792665
	2	1.776120	1.293050	0.824428	1.772454	1.279523	0.793427
	4	1.777692	1.295341	0.827328	1.772454	1.277747	0.793109
	6	1.778309	1.296051	0.827738	1.772454	1.277087	0.792777
	8	1.778749	1.296381	0.827576	1.772454	1.276626	0.792446
	10	1.779228	1.296719	0.827357	1.772454	1.276133	0.792114
	12	1.779537	1.296874	0.827060	1.772454	1.275786	0.791783
		$\Delta I_1 = 5.902927 \times 10^{-4}$			$\Delta I_1 = 5.551115 \times 10^{-17}$		
		$\Delta I_2 = 1.020528 \times 10^{-3}$			$\Delta I_2 = 7.367689 \times 10^{-4}$		
		$\Delta I_3 = 2.866246 \times 10^{-3}$			$\Delta I_3 = 7.350951 \times 10^{-5}$		
0.05	0	1.772454	1.315941	0.792665	1.772454	1.315941	0.792665
	2	1.774593	1.320635	0.808323	1.772454	1.312870	0.792962
	4	1.774946	1.321179	0.809242	1.772454	1.312531	0.792921
	6	1.775403	1.321703	0.809522	1.772454	1.312097	0.792872
	8	1.775784	1.322132	0.809736	1.772454	1.311743	0.792824
	10	1.775937	1.322286	0.80977	1.772454	1.311613	0.792775
	12	1.775983	1.322313	0.809741	1.772454	1.311573	0.792726
		$\Delta I_1 = 2.940831 \times 10^{-4}$			$\Delta I_1 = 5.551115 \times 10^{-17}$		
		$\Delta I_2 = 5.310472 \times 10^{-4}$			$\Delta I_2 = 3.639456 \times 10^{-4}$		
		$\Delta I_3 = 1.422959 \times 10^{-3}$			$\Delta I_3 = 5.052241 \times 10^{-6}$		
0.1	0	1.772454	1.378567	0.792665	1.772454	1.378567	0.792665
	2	1.773677	1.381060	0.799768	1.772454	1.376756	0.792748
	4	1.773847	1.381404	0.800521	1.772454	1.376602	0.792748
	6	1.773876	1.381421	0.800484	1.772454	1.376591	0.792742
	8	1.773934	1.381465	0.800488	1.772454	1.376550	0.792735
	10	1.774010	1.381526	0.800497	1.772454	1.376495	0.792729
	12	1.774103	1.381602	0.800509	1.772454	1.376427	0.792723
		$\Delta I_1 = 1.374261 \times 10^{-4}$			$\Delta I_1 = 6.291264 \times 10^{-16}$		
		$\Delta I_2 = 2.528678 \times 10^{-4}$			$\Delta I_2 = 1.783604 \times 10^{-4}$		
		$\Delta I_3 = 6.536047 \times 10^{-4}$			$\Delta I_3 = 4.798282 \times 10^{-6}$		



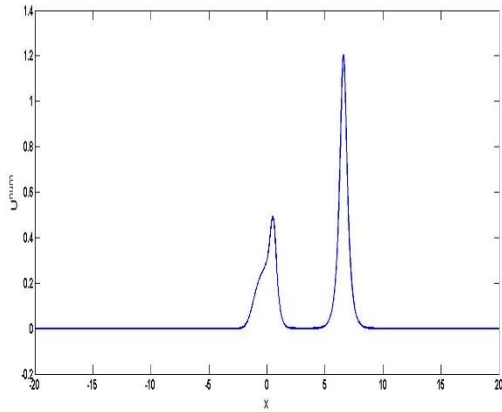
$$\mu = 0.01$$



$$\mu = 0.05$$



$$\mu = 0.025$$



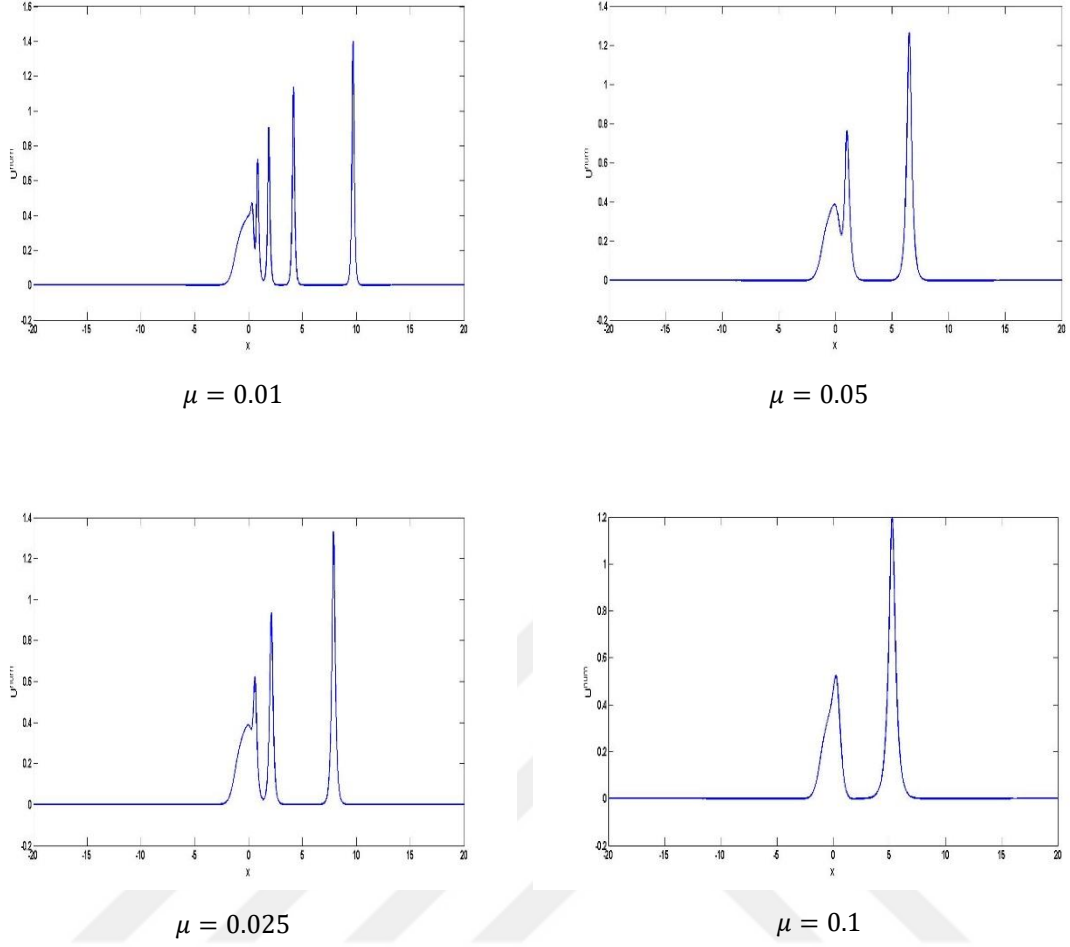
$$\mu = 0.1$$

Şekil 4-9: CNSFY-I: Maxvellian başlangıç şartlı dalga hareketi
($p = 3$, $h = 0.025$ ve $t = 12$)

Çizelge 4.36’da $p = 3$ için farklı μ değerlerinde CNSFY-I ve CNSFY-II ile invariant değerleri ve $\Delta I_1, \Delta I_2, \Delta I_3$ değerleri hesaplandı. Çizelgeden de görüldüğü üzere $\Delta I_1, \Delta I_2, \Delta I_3$ değerleri yeterince küçüktür. CNSFY-I ile $\mu = 0.01$ için elde edilen $\Delta I_1 = 1.404323 \times 10^{-3}$, $\Delta I_2 = 1.973864 \times 10^{-3}$, $\Delta I_3 = 5.730187 \times 10^{-3}$ iken CNSFY-II ile $\mu = 0.01$ için elde edilen $\Delta I_1 = 1.480297 \times 10^{-16}$, $\Delta I_2 = 2.042042 \times 10^{-3}$, $\Delta I_3 = 1.197186 \times 10^{-3}$ tür. Örnekteki değerlere bakıldığında CNSFY-II ile elde edilen $\Delta I_1, \Delta I_2, \Delta I_3$ değerlerinin CNSFY-I ile hesaplananlara göre daha küçük olduğu görülmektedir. Farklı μ değerleri için elde edilen $\Delta I_1, \Delta I_2, \Delta I_3$ ler karşılaştırıldığında μ değeri büyüdükçe $\Delta I_1, \Delta I_2, \Delta I_3$ değerlerinin azaldığı görülmektedir. Şekil 4.9’da Problem 3’ün $p = 3$ ve farklı μ değerleri için $t=12$ anında grafikleri sunulmuştur. $p = 2$ için verilen grafikte olduğu gibi $p = 3$ için verilen grafiklerde de μ değeri büyüdükçe dalga sayısı azalmaktadır.

Çizelge 4.37: Maxvellian başlangıç şartlı problemin CNSFY-I ve CNSFY-II ile elde edilen korunum sabitleri ($p = 4$, $h = 0.025$, $k = 0.01$ ve $x \in [-20,20]$, $\mu = 0.01, 0.025, 0.05, 0.1$).

		CNSFY-I			CNSFY-II		
μ	t	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.01	0	1.772454	1.265839	0.723601	1.772454	1.265839	0.723601
	2	1.786206	1.285222	0.866142	1.772454	1.252224	0.723842
	4	1.792240	1.303126	0.875091	1.772454	1.246051	0.719280
	6	1.795113	1.305031	0.868536	1.772454	1.242633	0.714806
	8	1.797159	1.305407	0.859451	1.772454	1.239991	0.710462
	10	1.798737	1.305149	0.850137	1.772454	1.237682	0.706243
	12	1.799446	1.303856	0.840671	1.772454	1.235981	0.702143
		$\Delta I_1 = 2.249356 \times 10^{-3}$			$\Delta I_1 = 1.48297 \times 10^{-16}$		
		$\Delta I_2 = 3.168034 \times 10^{-3}$			$\Delta I_2 = 2.488212 \times 10^{-3}$		
		$\Delta I_3 = 9.755802 \times 10^{-3}$			$\Delta I_3 = 1.788167 \times 10^{-3}$		
0.025	0	1.772454	1.284627	0.723601	1.772454	1.284627	0.723601
	2	1.778337	1.297338	0.778618	1.772454	1.278479	0.724283
	4	1.780623	1.300865	0.784720	1.772454	1.276406	0.723855
	6	1.782073	1.302835	0.786306	1.772454	1.275172	0.723409
	8	1.782765	1.303604	0.786483	1.772454	1.274546	0.722963
	10	1.783292	1.304036	0.786156	1.772454	1.274065	0.722518
	12	1.783867	1.304472	0.785701	1.772454	1.273569	0.722074
		$\Delta I_1 = 2.249356 \times 10^{-3}$			$\Delta I_1 = 9.251859 \times 10^{-17}$		
		$\Delta I_2 = 3.168034 \times 10^{-3}$			$\Delta I_2 = 9.215041 \times 10^{-4}$		
		$\Delta I_3 = 9.755802 \times 10^{-3}$			$\Delta I_3 = 1.272623 \times 10^{-4}$		
0.05	0	1.772454	1.315941	0.723601	1.772454	1.315941	0.723601
	2	1.775915	1.323097	0.749881	1.772454	1.312211	0.723872
	4	1.776609	1.324379	0.753580	1.772454	1.311565	0.723825
	6	1.777044	1.324886	0.753761	1.772454	1.311248	0.723765
	8	1.777669	1.325636	0.754088	1.772454	1.310781	0.723704
	10	1.778214	1.326286	0.754356	1.772454	1.310378	0.723643
	12	1.778548	1.326669	0.754481	1.772454	1.371135	0.723582
		$\Delta I_1 = 5.078078 \times 10^{-4}$			$\Delta I_1 = 9.251859 \times 10^{-17}$		
		$\Delta I_2 = 8.940096 \times 10^{-4}$			$\Delta I_2 = 4.837962 \times 10^{-4}$		
		$\Delta I_3 = 2.573331 \times 10^{-3}$			$\Delta I_3 = 1.564093 \times 10^{-6}$		
0.1	0	1.772454	1.378567	0.723601	1.772454	1.378567	0.723601
	2	1.774402	1.382364	0.735119	1.772454	1.376415	0.723674
	4	1.774998	1.383529	0.738315	1.772454	1.375837	0.723676
	6	1.774990	1.383496	0.738117	1.772454	1.375875	0.723669
	8	1.775029	1.383525	0.738103	1.772454	1.375854	0.723662
	10	1.775085	1.383572	0.738104	1.772454	1.375821	0.723655
	12	1.775157	1.383634	0.738107	1.772454	1.375779	0.723648
		$\Delta I_1 = 2.252594 \times 10^{-4}$			$\Delta I_1 = 2.775558 \times 10^{-16}$		
		$\Delta I_2 = 4.222523 \times 10^{-4}$			$\Delta I_2 = 2.323548 \times 10^{-4}$		
		$\Delta I_3 = 1.208823 \times 10^{-3}$			$\Delta I_3 = 3.906164 \times 10^{-6}$		

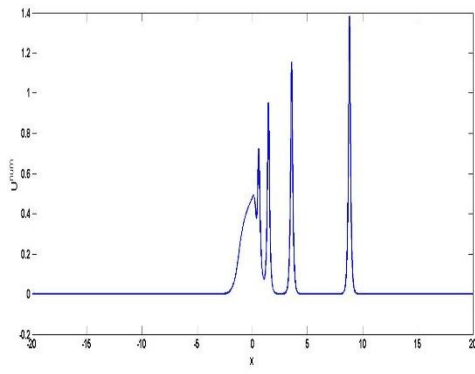


Şekil 4-10: CNSFY-I: Maxvellian başlangıç şartlı dalga hareketi
($p = 4, h = 0.025$ ve $t = 12$)

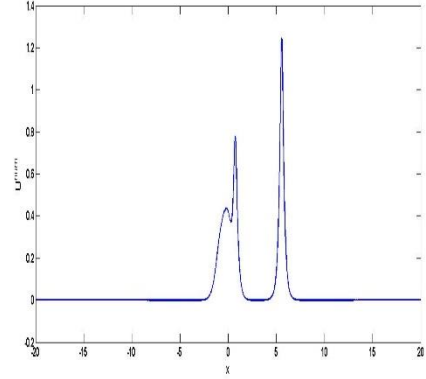
Çizelge 4.37’de $p = 4$ için farklı μ değerlerinde CNSFY-I ve CNSFY-II ye ile hesaplanan invariant değerleri ve $\Delta I_1, \Delta I_2, \Delta I_3$ değerleri hesaplandı. Çizelgeden I_1, I_2, I_3 korunum sabitlerindeki değişimin $\Delta I_1, \Delta I_2, \Delta I_3$ değerlerinden de görüldüğü üzere çok azdır. CNSFY-I ile $\mu = 0.025$ için elde edilen $\Delta I_1 = 2.249356 \times 10^{-3}$, $\Delta I_2 = 3.168034 \times 10^{-3}$, $\Delta I_3 = 9.755802 \times 10^{-3}$ iken CNSFY-II ile $\mu = 0.025$ için elde edilen $\Delta I_1 = 9.251859 \times 10^{-17}$, $\Delta I_2 = 9.215041 \times 10^{-4}$, $\Delta I_3 = 1.272623 \times 10^{-4}$ tür. Bu örnekten CNSFY-II ile hesaplanan $\Delta I_1, \Delta I_2, \Delta I_3$ değerlerinin CNSFY-I ile hesaplanan değişimlere göre daha küçük olduğu görülmektedir. Farklı μ değerleri için elde edilen $\Delta I_1, \Delta I_2, \Delta I_3$ ler karşılaştırıldığında μ değeri büyüdükçe $\Delta I_1, \Delta I_2, \Delta I_3$ değerlerinin azaldığı görülmektedir. Şekil 4.10’da Problem 3’ün $p = 4$ ve farklı μ değerleri için $t=12$ zamanındaki grafikleri sunulmuştur. Şekil 4.8 ve Şekil 4.9’dakilere benzer şekilde $p = 4$ için de μ değeri arttıkça dalga sayısı azalmaktadır.

Çizelge 4.38: Maxvellian başlangıç şartlı problemin CNSFY-I ile elde edilen korunum sabitleri($p = 5, h = 0.025, k = 0.01, x \in [-20, 20], \mu = 0.01, 0.025, 0.05, 0.1$).

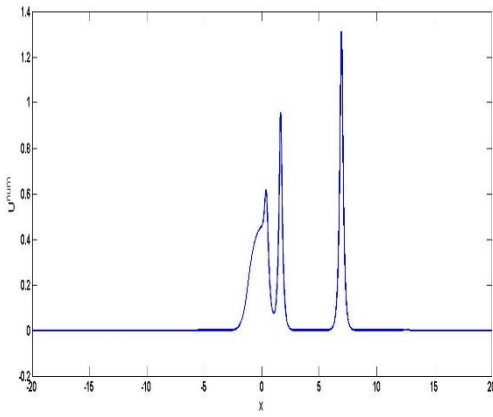
CNSFY-I					CNSFY-II		
μ	t	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.01	0	1.772454	1.265839	0.669925	1.772454	1.265839	0.669925
	2	1.791065	1.304967	0.902460	1.772454	1.251534	0.669488
	4	1.799080	1.315482	0.912472	1.772454	1.244665	0.663948
	6	1.803525	1.318971	0.897801	1.772454	1.240338	0.658574
	8	1.805747	1.318937	0.878252	1.772454	1.237609	0.653409
	10	1.807833	1.318742	0.860079	1.772454	1.235109	0.648442
	12	1.809602	1.318320	0.843617	1.772454	1.232813	0.643661
				$\Delta I_1 = 3.095687 \times 10^{-3}$			
				$\Delta I_2 = 4.373360 \times 10^{-3}$			
				$\Delta I_3 = 1.447439 \times 10^{-2}$			
					$\Delta I_1 = 0$		
					$\Delta I_2 = 2.752222 \times 10^{-3}$		
					$\Delta I_3 = 2.188626 \times 10^{-3}$		
0.025	0	1.772454	1.284627	0.669925	1.772454	1.284627	0.669925
	2	1.780656	1.301986	0.755415	1.772454	1.277838	0.670535
	4	1.783530	1.306831	0.768919	1.772454	1.275560	0.670044
	6	1.785811	1.310099	0.771528	1.772454	1.273979	0.669528
	8	1.787154	1.311914	0.772530	1.772454	1.273025	0.669012
	10	1.787968	1.312868	0.772562	1.772454	1.272390	0.668497
	12	1.788543	1.313390	0.772030	1.772454	1.271911	0.667984
				$\Delta I_1 = 1.340733 \times 10^{-3}$			
				$\Delta I_2 = 2.396846 \times 10^{-3}$			
				$\Delta I_3 = 8.508775 \times 10^{-3}$			
					$\Delta I_1 = 2.035409 \times 10^{-16}$		
					$\Delta I_2 = 1.059742 \times 10^{-3}$		
					$\Delta I_3 = 1.617008 \times 10^{-4}$		
0.05	0	1.772454	1.315941	0.669925	1.772454	1.315941	0.669925
	2	1.777178	1.325520	0.708478	1.772454	1.311870	0.670170
	4	1.778602	1.328331	0.718864	1.772454	1.310674	0.670123
	6	1.778929	1.328727	0.718995	1.772454	1.310475	0.670057
	8	1.779480	1.329403	0.719208	1.772454	1.310135	0.669991
	10	1.780176	1.330278	0.719518	1.772454	1.309704	0.669925
	12	1.780841	1.331112	0.719807	1.772454	1.309295	0.669859
				$\Delta I_1 = 6.989601 \times 10^{-4}$			
				$\Delta I_2 = 1.264265 \times 10^{-3}$			
				$\Delta I_3 = 4.156909 \times 10^{-3}$			
					$\Delta I_1 = 1.850372 \times 10^{-16}$		
					$\Delta I_2 = 5.537996 \times 10^{-4}$		
					$\Delta I_3 = 5.494157 \times 10^{-4}$		
0.1	0	1.772454	1.378567	0.669925	1.772454	1.378567	0.669925
	2	1.775023	1.383515	0.685939	1.772454	1.376295	0.669988
	4	1.776383	1.386157	0.694089	1.772454	1.375137	0.669992
	6	1.776370	1.386134	0.693884	1.772454	1.375182	0.669985
	8	1.776377	1.386122	0.693763	1.772454	1.375190	0.669978
	10	1.776411	1.386151	0.693754	1.772454	1.375172	0.669971
	12	1.776457	1.386192	0.693751	1.772454	1.375149	0.669964
				$\Delta I_1 = 3.335939 \times 10^{-4}$			
				$\Delta I_2 = 6.353639 \times 10^{-4}$			
				$\Delta I_3 = 1.985499 \times 10^{-3}$			
					$\Delta I_1 = 4.810966 \times 10^{-16}$		
					$\Delta I_2 = 2.848789 \times 10^{-4}$		
					$\Delta I_3 = 3.279291 \times 10^{-6}$		



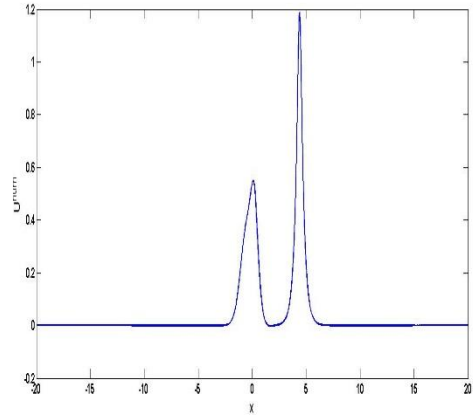
$$\mu = 0.01$$



$$\mu = 0.05$$



$$\mu = 0.025$$



$$\mu = 0.1$$

Şekil 4-11: CNSFY-I: Maxvellian başlangıç şartlı dalga hareketi
($p = 5, h = 0.025$ ve $t = 12$)

Çizelge 4.38’de $p = 5$ için farklı μ değerlerinde CNSFY-I ve CNSFY-II ile elde edilen invariant değerleri ve $\Delta I_1, \Delta I_2, \Delta I_3$ değerleri hesaplandı. Çizelgeden I_1, I_2, I_3 korunum sabitlerindeki değişimin $\Delta I_1, \Delta I_2, \Delta I_3$ değerlerinden de görüldüğü üzere oldukça azdır. CNSFY-I ile $\mu = 0.05$ için elde edilen $\Delta I_1 = 6.989601 \times 10^{-4}$, $\Delta I_2 = 1.264265 \times 10^{-3}$, $\Delta I_3 = 4.156909 \times 10^{-3}$ iken CNSFY-II ile $\mu = 0.05$ için elde edilen $\Delta I_1 = 1.850372 \times 10^{-16}$, $\Delta I_2 = 5.537996 \times 10^{-4}$, $\Delta I_3 = 5.494157 \times 10^{-4}$ tür. Örnekteki değerlere bakıldığında CNSFY-II için elde edilen $\Delta I_1, \Delta I_2, \Delta I_3$ değerlerinin CNSFY-I’dekine göre daha küçük olduğu görülmektedir. Farklı μ değerleri için elde edilen $\Delta I_1, \Delta I_2, \Delta I_3$ ler karşılaştırıldığında μ değeri büyüdükçe $\Delta I_1, \Delta I_2, \Delta I_3$ değerlerinin de azaldığı görülmektedir. Şekil 4.11’de Problem 3’ün $p = 5$ ve farklı μ değerleri için $t=12$ zamanındaki grafikleri sunulmuştur. Diğer p değerlerinde olduğu gibi $p = 5$ için de μ değeri arttıkça dalga sayısı azalmaktadır.

Çizelge 4.39: Maxvellian başlangıç şartlı problemin CNSFY-I ve CNSFY-II ile elde edilen korunum sabitlerinin diğer çalışmalardaki sonuçlar ile karşılaştırılması ($h = 0.1$, $k = 0.01$, $\mu = 0.01$ ve $x \in [-20, 20]$).

	t	$p = 2$			$p = 3$			$p = 4$		
		I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
CNSFY-I	0	1.772454	1.265839	0.886227	1.772454	1.265723	0.792665	1.772454	1.265723	0.723601
	4	1.859856	1.502349	1.701052	1.949902	1.650903	2.573858	2.059045	1.925364	10.12698
	8	1.877057	1.531020	1.791830	2.017644	1.806610	3.668686	2.027143	1.696714	3.429149
	12	1.880223	1.514632	1.659245	2.036026	1.813615	3.400503	2.110357	1.849286	4.171404
CNSFY-II	0	1.772454	1.265723	0.886227	1.772454	1.265723	0.792665	1.772454	1.265723	0.723601
	4	1.772454	1.170570	0.886905	1.772454	1.157676	0.792333	1.772454	1.159646	0.722857
	8	1.772454	1.161912	0.885524	1.772454	1.142577	0.790098	1.772454	1.137188	0.720187
	12	1.772454	1.158608	0.884148	1.772454	1.136319	0.787898	1.772454	1.129850	0.717922
[2]	0	1.772453	1.265847	0.886226	1.772453	1.265847	0.792665	1.772453	1.265847	0.723601
	4	1.773567	1.272162	0.913749	1.776431	1.280719	0.851731	1.803566	1.363095	1.083499
	8	1.774354	1.273668	0.905325	1.782107	1.293911	0.847407	1.805571	1.392182	1.468426
	12	1.773219	1.265638	0.897781	1.788222	1.329233	1.014441	1.757360	1.218707	0.577822
[38]	0	1.7724	1.2658	0.8862	1.7724	1.2658	0.7926	1.7724	1.2658	0.7236
	4	1.7732	1.2678	0.9061	1.7786	1.2847	0.8782	1.7855	1.2847	0.7715
	8	1.7742	1.2736	0.9234	1.7868	1.3131	0.9691	1.8014	1.3131	1.2362
	12	1.7739	1.2711	0.9123	1.7813	1.2901	0.8664	1.8156	1.2901	1.2707
[49]	0	1.7724	1.2658	0.8862	1.7724	1.2658	0.7927	1.7724	1.2658	1.7236
	4	1.7724	1.267	0.8837	1.7724	1.2674	0.7950	1.7725	1.2669	0.7251
	8	1.7723	1.2646	0.8846	1.7724	1.2665	0.7947	1.7723	1.2683	0.7251
	12	1.7724	1.2658	0.8862	1.7724	1.2665	0.7947	1.7725	1.2669	0.7253

Çizelge 4.40: Maxvellian başlangıç şartlı problemin CNSFY-I ve CNSFY-II ile elde edilen korunum sabitlerinin diğer çalışmalardaki sonuçlar ile karşılaştırılması ($h = 0.1$, $k = 0.01$, $\mu = 0.025$ ve $x \in [-20, 20]$).

		$p = 2$			$p = 3$			$p = 4$		
		I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
CNSFY-I	0	1.772454	1.284336	0.886227	1.772454	1.284336	0.792665	1.772454	1.284336	0.723601
	4	1.809218	1.377196	1.174252	1.863184	1.484781	1.619073	1.915825	1.594595	2.638075
	8	1.816047	1.385000	1.179561	1.878852	1.505250	1.635277	1.949913	1.642328	2.510000
	12	1.818362	1.386807	1.178313	1.889574	1.508361	1.566585	1.978915	1.703796	3.093020
CNSFY-II	0	1.772454	1.284336	0.886227	1.772454	1.284336	0.792665	1.772454	1.284336	0.723601
	4	1.772454	1.228259	0.886770	1.772454	1.214220	0.793015	1.772454	1.210548	0.723797
	8	1.772454	1.223666	0.886533	1.772454	1.206108	0.792616	1.772454	1.196902	0.723347
	12	1.772454	1.222288	0.886296	1.772454	1.200889	0.792219	1.772454	1.192313	0.722906
[2]	0	1.772453	1.284646	0.886226	1.772453	1.284646	0.792665	1.772453	1.284646	0.723601
	4	1.772624	1.285168	0.887871	1.772841	1.285658	1.799622	1.776099	1.298322	0.787247
	8	1.772635	1.285208	0.887926	1.772963	1.285086	0.792383	1.770003	1.274934	0.705119
	12	1.772636	1.285180	0.887737	1.772636	1.283938	0.793308	1.777013	1.302710	0.808295
[38]	0	1.7724	1.2846	0.8862	1.7724	1.2846	0.7926	1.7724	1.2846	0.7236
	4	1.7725	1.2846	0.8880	1.7731	1.2863	0.8056	1.7763	1.2967	0.7891
	8	1.7725	1.2846	0.8881	1.7733	1.2859	0.7996	1.7711	1.2762	0.7129
	12	1.7725	1.2846	0.8881	1.7730	1.2837	0.7946	1.7791	1.3056	0.8198
[49]	0	1.7724	1.2846	0.8862	1.7724	1.2846	0.7927	1.7724	1.2846	0.7236
	4	1.7724	1.2846	0.8859	1.7725	1.2844	0.7914	1.7724	1.2855	0.7246
	8	1.7724	1.2849	0.8857	1.7725	1.2838	0.7911	1.7725	1.2855	0.7244
	12	1.7724	1.2835	0.8856	1.7723	1.2834	0.7910	1.7724	1.2849	0.7243

Çizelge 4.41: Maxvellian başlangıç şartlı problemin CNSFY-I ve CNSFY-II ile elde edilen korunum sabitlerinin diğer çalışmalardaki sonuçlar ile karşılaştırılması ($h = 0.1$, $k = 0.01$, $\mu = 0.025$ ve $x \in [-20, 20]$).

		$p = 2$			$p = 3$			$p = 4$		
	t	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
CNSFY-I	0	1.772454	1.315357	0.886227	1.772454	1.315357	0.792665	1.772454	1.315357	0.723601
	4	1.789956	1.358279	1.012317	1.813638	1.403902	1.105679	1.843581	1.467345	1.414792
	8	1.793951	1.363279	1.015838	1.827564	1.420818	1.114813	1.862689	1.492366	1.434238
	12	1.794598	1.363705	1.015773	1.830886	1.424892	1.117419	1.877545	1.510073	1.428995
CNSFY-II	0	1.772454	1.315357	0.886227	1.772454	1.315357	0.792665	1.772454	1.315357	0.723601
	4	1.772454	1.283178	0.886476	1.772454	1.272438	0.792871	1.772454	1.265258	0.723767
	8	1.772454	1.279444	0.886431	1.772454	1.264074	0.792798	1.772454	1.257804	0.723685
	12	1.772454	1.279281	0.886385	1.772454	1.262153	0.792724	1.772454	1.251205	0.723601
[2]	0	1.772453	1.315979	0.886226	1.772453	1.315979	0.792665	1.772453	1.315979	0.723601
	4	1.772519	1.316150	0.886577	1.772578	1.316226	0.793414	1.772432	1.315294	0.722397
	8	1.772520	1.316152	0.886582	1.772577	1.316198	0.793400	1.772717	1.316536	0.72637
	12	1.772520	1.316151	0.886579	1.772592	1.31625	0.793420	1.773333	1.318824	0.731885
[38]	0	1.7724	1.3159	0.8862	1.7724	1.3159	0.7926	1.7724	1.3159	0.7236
	4	1.7724	1.3159	0.8864	1.7725	1.3159	0.7938	1.7726	1.3155	0.7253
	8	1.7724	1.3159	0.8864	1.7725	1.3159	0.7939	1.7729	1.3168	0.7297
	12	1.7724	1.3159	0.8864	1.7725	1.3160	0.7940	1.7735	1.3188	0.7345
[46]	0	1.7724537	1.3162954	0.8862269	1.7724537	1.3162954	0.7926655	1.7724537	1.3162954	0.7236013
	4	1.7724537	1.5406812	0.8862269	1.7724537	1.5766908	0.7926655	1.7724537	1.6243519	0.7236013
	8	1.7724537	1.6342604	0.8862269	1.7724537	1.6367952	0.7926655	1.7724537	1.6554614	0.7236013
	12	1.7724537	1.6836979	0.8862269	1.7724537	1.6372439	0.7926655	1.7724537	1.7079133	0.7236013
[49]	0	1.7724	1.3159	0.8862	1.7724	1.3159	0.7927	1.7724	1.3160	0.7236
	4	1.7724	1.3161	0.8862	1.7724	1.3161	0.7925	1.7725	1.3174	0.7236
	8	1.7724	1.3161	0.8861	1.7724	1.3156	0.7922	1.7725	1.3154	0.7240
	12	1.7724	1.3160	0.8861	1.7724	1.3156	0.7922	1.7724	1.3177	0.7245

Çizelge 4.42: Maxvillian başlangıç şartlı problemin CNSFY-I ve CNSFY-II ile elde edilen korunum sabitlerinin diğer çalışmalardaki sonuçlar ile karşılaştırılması ($h = 0.1$, $k = 0.01$, $\mu = 0.1$ ve $x \in [-20,20]$).

		$p = 2$			$p = 3$			$p = 4$		
	t	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
CNSFY-I	0	1.772454	1.377401	0.886227	1.772454	1.377401	0.792665	1.772454	1.377401	0.723601
	4	1.780916	1.397599	0.940281	1.795152	1.423789	0.927797	1.814682	1.461665	1.003124
	8	1.782141	1.398578	0.940585	1.796505	1.424838	0.927453	1.815210	1.461641	0.999155
	12	1.783459	1.399656	0.940939	1.799166	1.427120	0.927975	1.817262	1.463588	0.999934
CNSFY-II	0	1.772454	1.377401	0.886227	1.772454	1.377401	0.792665	1.772454	1.377401	0.723601
	4	1.772454	1.359669	0.886306	1.772454	1.349827	0.792736	1.772454	1.341419	0.723662
	8	1.772454	1.358709	0.886298	1.772454	1.349270	0.792726	1.772454	1.341753	0.723651
	12	1.772454	1.357651	0.886291	1.772454	1.347845	0.792715	1.772454	1.340906	0.723639
[2]	0	1.772453	1.378645	0.886226	1.772453	1.378645	0.792665	1.772453	1.378645	0.723601
	4	1.772478	1.378707	0.886327	1.772501	1.378748	0.792856	1.772530	1.378826	0.724088
	8	1.772479	1.378707	0.886327	1.772500	1.378745	0.792853	1.772531	1.378843	0.724131
	12	1.772479	1.378707	0.886100	1.772400	1.378700	0.792600	1.773400	1.383600	0.722400
[38]	0	1.7724	1.3786	0.8862	1.7724	1.3786	0.7926	1.7724	1.3786	0.7236
	4	1.7724	1.3786	0.8862	1.7724	1.3786	0.7928	1.7725	1.3786	0.7243
	8	1.7724	1.3786	0.8862	1.7724	1.3786	0.7928	1.7725	1.3787	0.7243
	12	1.7724	1.3786	0.8862	1.7724	1.3786	0.7928	1.7725	1.3786	0.7243
[46]	0	1.7724537	1.3792767	0.8862269	1.7724537	1.3292767	0.7926655	1.7724537	1.3792767	0.7236013
	4	1.7724537	1.5760586	0.8862269	1.7724537	1.6168691	0.7926655	1.7724537	1.6360543	0.7236013
	8	1.7724537	1.5838481	0.8862269	1.7724537	1.6245008	0.7926655	1.7724537	1.6481131	0.7236013
	12	1.7724537	1.5920722	0.8862269	1.7724537	1.6325922	0.7926655	1.7724537	1.6531844	0.7236013
[49]	0	1.7724	1.3786	0.8862	1.7724	1.3786	0.7927	1.7786	1.3786	0.7235
	4	1.7724	1.3790	0.8863	1.7724	1.3787	0.7928	1.7723	1.3793	0.7231
	8	1.7724	1.3787	0.8862	1.7724	1.3788	0.7926	1.7712	1.3863	0.7207
	12	1.7724	1.3785	0.8861	1.7724	1.3787	0.7926	1.7734	1.3836	0.7224

Çizelge 4.39-4.42’de Maxvillian başlangıç şartlı problemin farklı μ değerleri ve $p = 2,3$ ve 4 için CNSFY-I ve CNSFY-II ile elde edilen korunum sabitleri ile diğer çalışmalarda verilen korunum sabitleri karşılaştırıldı. Çizelgelerden her iki yöntem ile hesaplanan sonuçların biribiri ile ve diğer çalışmalardaki sonuçlar ile uyumlu olduğu açıktır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, GEW denkleminin denklemdaki lineer olmayan $U^p U_x$ terimi yerine Rubin-Graves ve Richtmyer lineerleştirme tekniği kullanılarak sırasıyla CNSFY-I ve CNSFY-II olarak adlandırılan Crank-Nicolson sonlu fark şemaları elde edildi. Bu şemalar farklı başlangıç ve sınır şartları ile verilen üç model probleme uygulandı. p 'nin farklı değerleri için elde edilen sonuçlar mevcut tam çözümlerle ve literatürdeki diğer çalışmalarla karşılaştırılarak çizelgeler ve grafikler halinde sunuldu. Bu bölümde, CNSFY-I ve CNSFY-II elde edilen ve Bölüm 4' de sunulan sonuçların kısa bir özeti sunularak bu iki yöntemin kendi içinde karşılaştırılması yapıldı.

Çizelge 5.1: Tek soliter dalganın CNSFY-I ve CNSFY-II ile hesaplanan hata normları ($p = 2, 3, 4, 6, 8, 10$, $h = 0.05$, $k = 0.05$ ve $t = 20$).

	L_2		L_∞	
	CNSFY-I	CNSFY-II	CNSFY-I	CNSFY-II
$p = 2, c = 0.5, A = 1$	7.521624×10^{-3}	3.749332×10^{-3}	4.671511×10^{-3}	2.454481×10^{-3}
$p = 3, c = 0.3, A = 1$	7.379060×10^{-3}	2.900650×10^{-3}	5.010846×10^{-3}	2.136065×10^{-3}
$p = 4, c = 0.2, A = 1$	7.331501×10^{-3}	2.515577×10^{-3}	5.287835×10^{-3}	2.017457×10^{-3}
$p = 6, c = 0.1, A = 0.98$	6.720161×10^{-3}	2.110102×10^{-3}	5.249609×10^{-3}	1.969695×10^{-3}
$p = 8, c = 0.1, A = 1.05$	1.166648×10^{-2}	2.954774×10^{-3}	9.440220×10^{-3}	2.847677×10^{-3}
$p = 10, c = 0.1, A = 1.08$	1.734087×10^{-2}	3.795159×10^{-3}	1.439055×10^{-2}	3.752848×10^{-3}

Çizelge 5.1' de Problem 1'de sunulan tek soliter dalga hareketi probleminin p 'nin farklı değerleri için CNSFY-I ve CNSFY-II ile elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları verildi. Çizelgeden bütün p değerleri için sonuçların genel olarak uyumlu olduğu ancak CNSFY-II ile elde edilen hata normlarının daha küçük olduğu görülmektedir.

Çizelge 5.2: İki soliter dalganın CNSFY-I ve CNSFY-II ile hesaplanan korunum sabitleri ve değişim oranları ($h = 0.05$, $k = 0.05$, $p = 2,3,4$).

	CNSFY-I			CNSFY-II		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
$p = 2$, $c_1 = 0.5$, $c_2 = 0.125$, $A_1 = 1$, $A_2 = 0.5$	4.712470	3.332399	1.416657	4.712390	3.332229	1.416624
	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3
	1.352044×10^{-6}	5.812933×10^{-7}	2.167364×10^{-7}	1.993070×10^{-8}	2.267415×10^{-6}	7.576517×10^{-7}
$p = 3$, $c_1 = 0.3$, $c_2 = 0.0375$, $A_1 = 1$, $A_2 = 0.5$	4.207254	3.078841	1.016364	4.206547	3.077735	1.016318
	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3
	7.078173×10^{-6}	5.432277×10^{-6}	2.316592×10^{-8}	9.494510×10^{-9}	5.623626×10^{-6}	4.836546×10^{-7}
$p = 4$, $c_1 = 0.2$, $c_2 = \frac{1}{80}$, $A_1 = 1$, $A_2 = 0.5$	3.934495	2.944078	0.797474	3.933087	2.942244	0.797640
	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3
	1.173906×10^{-5}	8.979728×10^{-6}	1.648403×10^{-6}	7.050797×10^{-9}	6.305724×10^{-6}	2.621155×10^{-7}

Çizelge 5.2’ de Problem 2’de sunulan iki soliter dalganın etkileşimi probleminin p ’nin farklı değerleri için CNSFY-I ve CNSFY-II ile elde edilen korunum sabitleri ile değişimleri sunuldu. Çizelgeden bütün p değerleri için her iki yöntem ile elde edilen korunum sabitlerinin uyumlu olduğu ve korunum sabitlerindeki değişimlerinde yeterince küçük ve yakın olduğu açıktır.

Çizelge 5.3: Maxvellian başlangıç şartlı problemin CNSFY-I ve CNSFY-II ile hesaplanan korunum sabitlerinin değişimi ($h = 0.05$, $k = 0.05$, $p = 2,3,4$, $\mu = 0.01, 0.025, 0.05, 0.1$ ve $t = 12$).

		CNSFY-I			CNSFY-II		
		ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3	ΔI_1	ΔI_2	ΔI_3
$p = 2$	$\mu = 0.01$	5.969925×10^{-4}	1.019854×10^{-3}	2.961371×10^{-3}	1.480297×10^{-16}	1.319457×10^{-3}	4.470585×10^{-4}
	$\mu = 0.025$	2.398682×10^{-4}	5.014594×10^{-4}	1.353850×10^{-3}	1.480297×10^{-16}	4.614268×10^{-4}	4.963024×10^{-7}
	$\mu = 0.05$	1.155750×10^{-4}	2.517989×10^{-4}	6.516778×10^{-4}	5.551115×10^{-17}	2.216990×10^{-4}	1.489913×10^{-5}
	$\mu = 0.1$	5.752044×10^{-5}	1.183116×10^{-4}	2.837967×10^{-4}	5.551115×10^{-17}	1.118877×10^{-4}	5.938831×10^{-6}
$p = 3$	$\mu = 0.01$	1.404323×10^{-3}	1.973864×10^{-3}	5.730187×10^{-3}	1.480297×10^{-16}	2.042042×10^{-3}	1.197186×10^{-3}
	$\mu = 0.025$	5.902927×10^{-4}	1.020528×10^{-3}	2.866246×10^{-3}	5.551115×10^{-17}	7.367689×10^{-4}	7.350951×10^{-5}
	$\mu = 0.05$	2.940831×10^{-4}	5.310472×10^{-4}	1.422959×10^{-3}	5.551115×10^{-17}	3.639456×10^{-4}	5.052241×10^{-6}
	$\mu = 0.1$	1.374261×10^{-4}	2.528678×10^{-4}	6.536047×10^{-4}	6.291264×10^{-16}	1.783604×10^{-4}	4.798282×10^{-6}
$p = 4$	$\mu = 0.01$	2.249356×10^{-3}	3.168034×10^{-3}	9.755802×10^{-3}	1.48297×10^{-16}	2.488212×10^{-3}	1.788167×10^{-3}
	$\mu = 0.025$	2.249356×10^{-3}	3.168034×10^{-3}	9.755802×10^{-3}	9.251859×10^{-17}	9.215041×10^{-4}	1.272623×10^{-4}
	$\mu = 0.05$	5.078078×10^{-4}	8.940096×10^{-4}	2.573331×10^{-3}	9.251859×10^{-17}	4.837962×10^{-4}	1.564093×10^{-6}
	$\mu = 0.1$	2.252594×10^{-4}	4.222523×10^{-4}	1.208823×10^{-3}	2.775558×10^{-16}	2.323548×10^{-4}	3.906164×10^{-6}

Çizelge 5.3’de Problem 3’de sunulan Maxvellian başlangıç şartlı probleminin p ’nin farklı değerleri için CNSFY-I ve CNSFY-II ile elde edilen korunum sabitlerinin değişimleri sunuldu. Çizelgeden bütün p değerleri için CNSFY-I yöntemi ile elde edilen sonuçlar yeterince küçüktür. CNSFY-II ile elde edilen sonuçların ise CNSFY-I’e göre daha küçük olduğu görülmektedir. Her iki yöntem ile elde edilen korunum sabitlerindeki değişim göz

önüne alındığında değişimin az olduğu dolayısıyla invaryant değerlerinin iyi korunduğu açıktır.

Sonuç olarak bu tez çalışmasında lineer olmayan GEW denklemi için Rubin-Graves ve Richtmyer lineerleştirme tekniği kullanılarak elde edilen CNSFY-I ve CNSFY-II şemaları ile hesaplanan sonuçların mevcut tam çözüm ve literatürdeki sonuçlar ile uyumlu olduğu ve bu lineerleştirme tekniklerinin Crank-Nicolson yöntemi ile birlikte literatürdeki farklı lineer olmayan denklemlere de uygulanabileceği açıkça görülmektedir.



KAYNAKLAR

- [1] **Irk, D.** (2007). B-spline finite element solutions of the some partial differential equation systems, *Ph.D. Thesis Osmangazi Üniversitesi.*
- [2] **Zeybek, H.** (2016). GEW ve GRLW Denklemlerinin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Sayısal Çözümleri, *Doktora Tezi, Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi.*
- [3] **Russell, J.S.** (1844). Report on waves, *Rep.14 th Meeting of British Ass. For the Advancement of science, London, pp. 311-390+11 plates.*
- [4] **Korteweg, D. and de Vries, G.** (1895). On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of long stationary wave, *Phil. Mag.*, 39, 422-443.
- [5] **Zabusky, N.J. and Kruskal, M.D.** (1965). “Interaction of soliton’s in a collisionless plasma and recurrence of initial states” *Phys. Rev. Lett. Vol.15, no6, p240*
- [6] **Benjamin, T.B., Bona, J.L. and Mahony, J.J.** (1972). “Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems” *Philosophical Transactions Society London Series A*, 272, 47-78.
- [7] **Peregrine, D.H.** (1966). Calculations of the development of an undular bore, *J. Fluid Mech.* 25 (1966) 321 – 330
- [8] **Morrison, P.J., Meiss, J.D. and Carey, J.R.** (1984). Scattering of RLW solitary waves, *Physica D*, 324 - 336.
- [9] **Hamdi, S.** (2002). Numerical solutions of the equal width wave equation using an adaptive method of lines, *Ph. D. Thesis, University of Toronto, Canada 2002.*
- [10] **Uçar, Y.** (2005). “1-Boyutlu Burgers Tipi Denklemlerin Sonlu Fark Çözümleri”, *MSc.Thesis, İnönü University, Turkey.*
- [11] **Bulut, B.** (2007). “Klasik Sonlu Fark Yöntemleri ve Uygulamaları”, *Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi.*
- [12] **Smith, G.D.** (1987). “Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods” ,3rd Edn, *Clarendon Press-Oxford.*
- [13] **Rubin, S.G. and Graves, R.A.** (1975). “Cubic spline approximation for problems in fluid mechanics”, *Nasa TR R-436, Washington, D.C.*
- [14] **Richtmyer, R.D. and Morton, K.W.** (1967). *Difference methods for initial-values problems*, Interscience Publishers, Newyork.
- [15] **Yalvaç, Ş.** (2016). “Düzenli Uzun Dalga (RLW) Denkleminin Sonlu Fark Yöntemleri ile Çözümleri”, *Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi.*

- [16] **Gardner, L.R.T. and Gardner, G.A.** (1991). “Solitary waves of the equal width wave equation”, *Journal of Computational Physics*, 101 (1), 218-223.
- [17] **Gardner, L.R.T., Gardner, G.A., Ayoup, F.A., Ameen, N.K.** (1997). “Simulations of the EW undular bore”, *Commun. Numer. Meth. En.*, 13 (7), 583-592.
- [18] **Doğan, A.** (2005). “Application of Galerkin’s method to equal width wave equation”, *Applied Mathematics and Computation*, 160 (1), 65-76.
- [19] **Zaki, S.I.** (2000). “A least-squares finite element scheme for the EW equation”, *Comp. Methods in Appl. Mech. and Eng.*, 189 (2), 587-594.
- [20] **Ateş, M.H.** (2014). “Eşit Genişlikli Dalga (EW) Denkleminin Sonlu Fark Yöntemleri ile Çözümleri”, *Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi*.
- [21] **Esen, A.** (2005). “A numerical solution of the equal width wave equation by a lumped Galerkin method”, *Applied Mathematics and Computation*, 168 (1), 270-282.
- [22] **Karakaş, A.S.** (2020). “Eşit Genişlikli (EW) Dalga Denkleminin Trigonometrik B-Spline Kollokasyon Sonlu Eleman Yöntemiyle Nümerik Çözümleri”, *Y. L. Tezi, İnönü Üniversitesi*.
- [23] **Saka, B.** (2006). “A finite element method for equal width equation”, *Applied Mathematics and Computation*, 175 (1), 730-747.
- [24] **Dağ, I., Saka, B.** (2004). “A cubic B-spline collocation method for the EW equation”, *Mathematical and Computational Applications*, 9 (3), 381-392.
- [25] **Raslan, K.R.** (2005). “Collocation method using quartic B-spline for the equal width (EW) equation”, *Applied Mathematics and Computation*, 168 (2), 795-805.
- [26] **Fazal-İ-Haq, K.R., Shah, I.A. and Ahmad, S.** (2013). “Septic B-spline collocation method for numerical solution of the equal width wave (EW) equation”, *Life Science Journal*, 10 (1), 253-260.
- [27] **Helvacıoğlu, Z.** (2009). “Equal width (EW) denkleminin b-spline fonksiyonlar yardımıyla nümerik çözümleri”, *Yüksek Lisans Tezi, Dumlunur Üniversitesi*.
- [28] **Çakıcı Pınarbaşı, I.** (2024), “EW denkleminin çözümü için çok adımlı üstel B-spline kolokasyon yöntemi”, *Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi*.
- [29] **Esen, A.** (2006). “A lumped Galerkin method for the numerical solution of the modified equal width wave equation using quadratic B-splines”, *International Journal of Computer Mathematics*, 83 (5-6), 449-459.
- [30] **Geyikli, T., Karakoc, S.B.G.** (2011). “Septic B-spline collocation method for the numerical solution of the modified equal width wave equation”, *Applied Mathematics*, 2011 (2), 739-749.

- [31] **Karakoç, S.B.** (2011). “Sonlu elemanlar yöntemi ile Modifiye Edilmiş Dalga Denkleminin sayısal çözümleri”, *Doktora Tezi, İnönü Üniversitesi*.
- [32] **Saka, B.** (2007). “Algorithms for numerical solution of the modified equal width wave equation using collocation method”, *Mathematical and Computer Modelling*, 45 (9-10), 1096-1117.
- [33] **İslam, S., Haq, F. and Tirmizi, İ.A.** (2010). “Collocation method using quartic B-spline for numerical solution of the modified equal width wave equation”, *J. Appl. Math. & Informatics*, 28 (3-4), 611-624.
- [34] **Keskin, P.** (2010), “Solitary Dalga Çözümlerine Sahip Bazı KTD’lere Sonlu Farklar Yöntemlerinin Uygulanması”, *Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi*.
- [35] **Raslan, R., Ramadan, M.A. and Amien, I.G.** (2014). Finite Difference Approximations For The Modified Equal Width Wave (Mew) Equation, *J. Math. Comput. Sci.* 4, No. 5, 940-957 ISSN: 1927-5307.
- [36] **Hassan, H.N.** (2016). “An Accurate Numerical Solution for the Modified Equal Width Wave Equation Using the Fourier Pseudo-Spectral Method” , *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 4, 1054-1067.
- [37] **Yasser, M.A.E.** (2016). “Multigrid Method for the Numerical Solution of the Modified Equal Width Wave Equation”, *Applied Mathematics*, 7, 1140-1147.
- [38] **Kaya, İ.** (2021). “B-Spline kollokasyon yöntemi ile GEW denkleminin Sayısal Çözümleri” , *Y.L. Tezi, Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi*.
- [39] **Karta, M.** (2023). “A numerical algorithm for solitary wave solutions of the GEW equation”, *African Mathematical Union and Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature*.
- [40] **Panahipour, H.** (2012). “Numerical simulation of GEW equation using RBF collocation method”, *Safahan Institute of Higher Education, Isfahan 81747-43196, Iran*.
- [41] **Karakoç, S.B., Omrani, K. and Sucu, D.** (2021). “Numerical investigations of shallow water waves via generalized equal width (GEW) equation”, *Applied Numerical Mathematics* 162, 249–264.
- [42] **Bhowmik, S.K. and Karakoç, S.B.** (2019). “Numerical solutions of the generalized equal width wave equation using Petrov Galerkin method”, *Applied Numerical Mathematics*.
- [43] **İnan, B. ve Bahadır, A. R.** (2019). “A Fully Implicit Finite Difference Approach for Numerical Solution of the GEW”, *The National Academy of Sciences, India*.

- [44] **Karakoç, S.B. ve Zeybek, H.** (2015). “A cubic B-spline Galerkin Approach For The Numerical Simulation Of The GEW Equation”, *Statistics Optimization And Information Computing*.
- [45] **Karakoç, S.B. ve Zeybek, H.** (2017). “Application Of The Collocation Method With B-Splines To The GEW Equation”, *ETNA Kent State University and Johann Radon Institute (RICAM)*.
- [46] **Tatlısu, Y.** (2023). “GEW ve Denklemini buraya yazın.MKDV Denklemlerinin Petrov-Galerkin Yöntemi İle Sayısal Çözümleri”, *Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi, Y.L. Tezi*.
- [47] **Evans, D.J. and Raslan, K.R.** (2005). “Solitary waves for the generalized equal width (GEW) equation”, *International Journal of Computer Mathematics*, 82 (4), 445-455.
- [48] **Esen, A. ve Kutluay, S.** (2006). “Solitary Wave Solutions Of The Modified Equal Width Wave Equation”, *Elsevier Science Direct*.
- [49] **Roshan, T.** (2011). “A Petrov-Galerkin method for solving the generalized equal width (GEW) equation”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235, 1641-1652.
- [50] **Akçapınar, F.** (2024). “MRLW Denkleminin yaklaşık nümerik çözümü için bir sonlu fark şeması”, *İnönü Üniversitesi. Yüksek Lisans Tezi*.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Hacer SARIBAŞ

ÖĞRENİM DURUMU:

Lisans: 2013, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Lisans: 2022, Fırat Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği.

MESLEKİ DENEYİMLER:

Matematik Öğretmeni, 2013-2014, Çözüm Dershanesi

Matematik Öğretmeni, 2014-2015, Özel Ankara Çınar ASML

Yurt Yönetim Memuru, 2017-2023, Gençlik ve Spor Bakanlığı

Öğretmen, 2023-Devam ediyor, Adalet Bakanlığı.